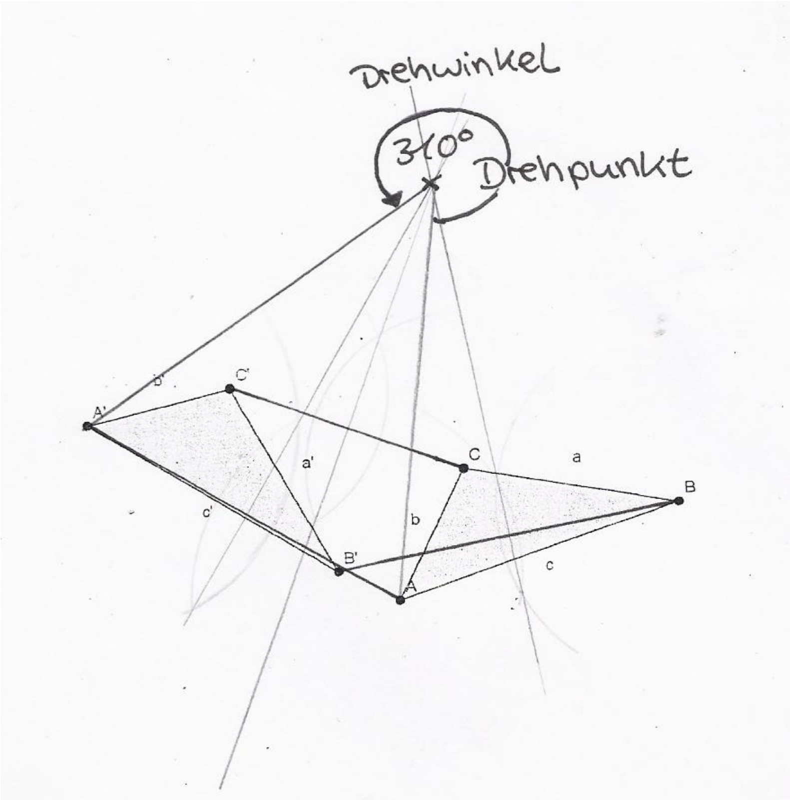
Drehung

Lösung:

Aufgabe:

Gegeben sind zwei Dreiecke, die durch Drehung auseinander hervorgegangen sind.
Konstruieren Sie den Drehpunkt und messen Sie den Drehwinkel aus.
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion.



<u>Behauptung</u>:
Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu den Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ ist das Drehzentrum.

<u>Begründung</u>:
Auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AA'}$ liegen alle Punkte, die von A und A’ den gleichen Abstand haben. Entsprechend liegen auf den Mittelsenkrechten zu $\overline{BB'}$ bzw. zu $\overline{CC'}$ alle Punkte, die von B und B’ bzw. von C und C’ den gleichen Abstand haben. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten hat damit die Eigenschaft, jeweils von A und A’, B und B’ und C und C’ den gleichen Abstand zu haben, dies ist die Eigenschaft des Drehzentrums. (Alle Punkte liegen letztlich auf konzentrischen Kreisen um das Drehzentrum.)

Drehung

<u>Konstruktionsbeschreibung</u>:
Zuerst werden die Originalpunkte mit den Bildpunkten verbunden. Zu den entstandenen Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ werden die Mittelsenkrechten konstruiert.
Um den Drehwinkel zu bestimmen, wird ein Originalpunkt und der dazugehörige Bildpunkt mit dem Drehzentrum verbunden. Nun kann der Drehwinkel bestimmt werden. Hier im Beispiel beträgt der Drehwinkel 310° (mathematisch positiv = Drehung gegen den Uhrzeigersinn!)

Zusatzaufgabe:

Eine Drehung mit dem Ursprung als Drehzentrum um den Winkel α wird durch die Drehmatrix $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ beschrieben; ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ wird durch die Multiplikation $\vec{v}' = M * \vec{v}$ auf den Vektor $\vec{v}'$ abgebildet.

Das Dreieck *ABC* mit *A* (1 | -2), *B* (4| -1), *C* (2 | 2)
wird um 45° um den Ursprung gedreht.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Bilddreiecks.

Lösung (über Matrixrechnung):

$$\vec{v}' = M * \vec{v}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$ / *A* (1 | -2)

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ / „Zeile mal Spalte“, elementweise

$$= \begin{pmatrix} \cos 45° \cdot 1 + & -\sin 45° \cdot (-2) \\ \sin 45° \cdot 1 + & \cos 45° \cdot (-2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}12 \\ -0{,}71 \end{pmatrix}$$ / *A´* (2,05 | -1,17)

Entsprechend lassen sich berechnen: *B´* (3,54 | 2,12), *C´* (0 | 2,83)

Zeichnung mit Geogebra: