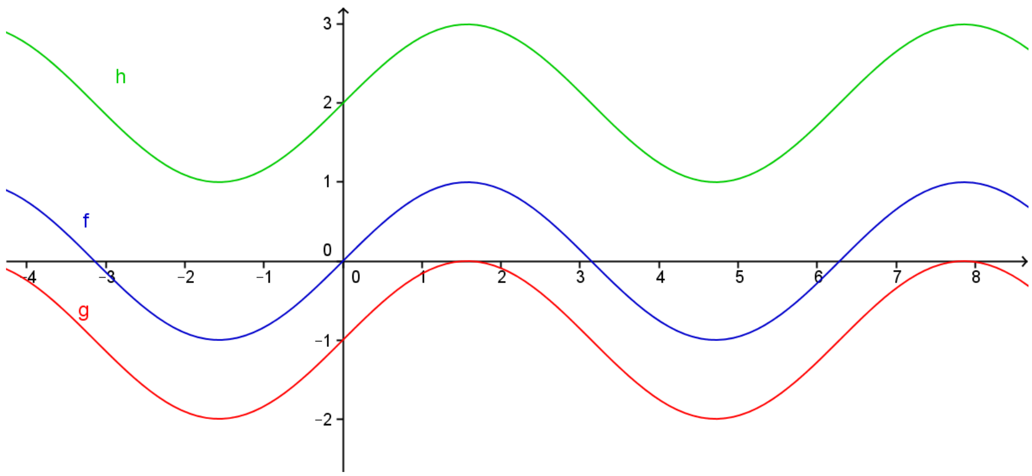
Periodische Funktionen

LÖSUNG

Aufgabe 1:

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen in GeoGebra und vergleichen Sie diese. Was fällt auf? Versuchen Sie, eine Regel zu finden. Überprüfen Sie ihre Vermutungen, indem Sie weitere, ähnliche Funktionen in GeoGebra zeichnen.

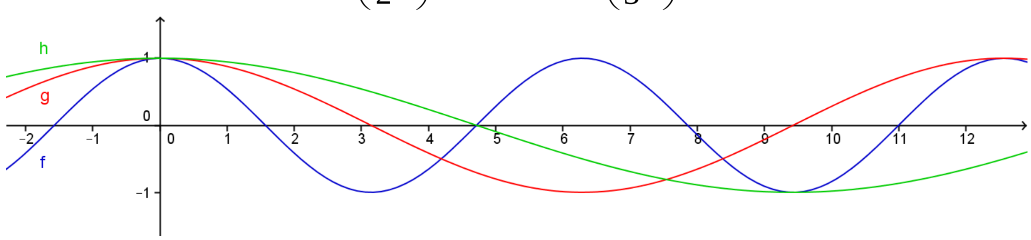
a) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \sin(x) - 1$, $h(x) = \sin(x) + 2$, …



Der Graph von g ist um 1 Einheit nach unten verschoben, derjenige von h um zwei Einheiten nach oben.

→ $\sin(x) + d$ ist im Vergleich zu $\sin(x)$ um d entlang der y-Achse verschoben

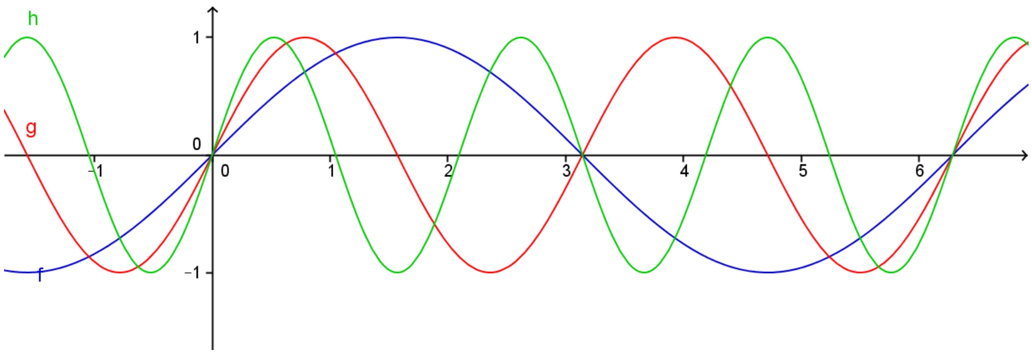
b) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$, $h(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$, …



Die Graphen von g und h sind im Vergleich zu f gestreckt, f hat die Periode 2π, g hat die Periode 4π und h hat die Periode 6π.

→ $\cos(b \cdot x)$ ist für b<1 im Vergleich zu $\cos(x)$ entlang der x-Achse gestreckt; für die Periodenlänge gilt: $p = \frac{2\pi}{b}$

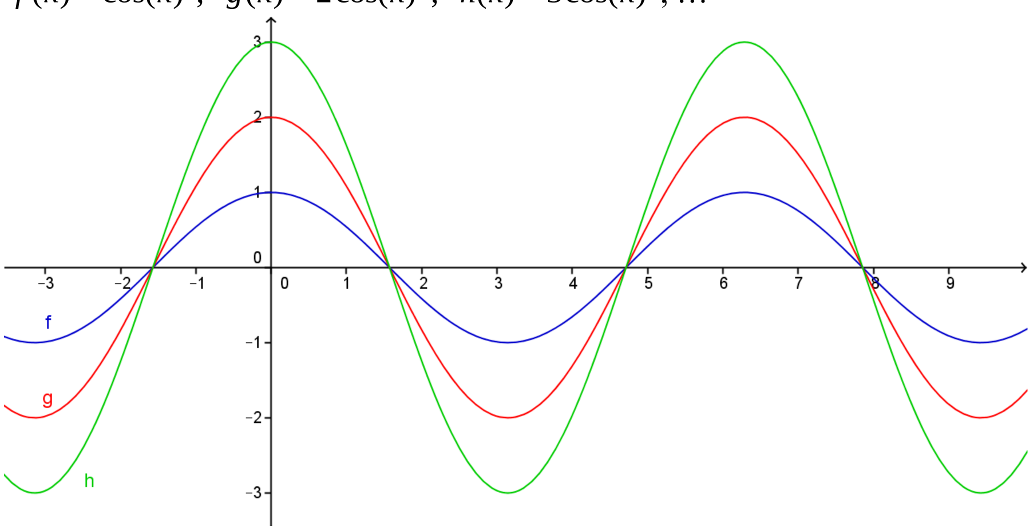
c) $f(x)=\sin(x)$, $g(x)=\sin(2x)$, $h(x)=\sin(3x)$, …



Die Graphen von g und h sind im Vergleich zu f gestaucht, f hat die Periode 2π, g hat die Periode π und h hat die Periode $\frac{2}{3}\pi$.

→ $\sin(b \cdot x)$ ist für b>1 im Vergleich zu $\sin(x)$ entlang der x-Achse gestaucht; für die Periodenlänge gilt auch hier: $p=\frac{2\pi}{b}$

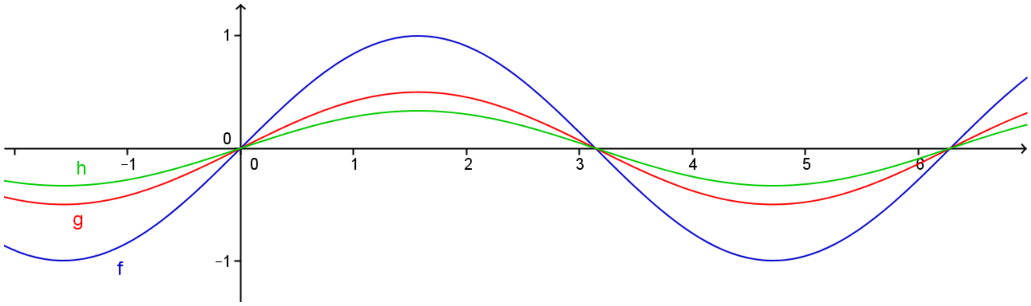
d) $f(x)=\cos(x)$, $g(x)=2\cos(x)$, $h(x)=3\cos(x)$, …



Die Graphen der Funktionen g und h sind im Vergleich zur f entlang der y-Achse gestreckt; f hat Funktionswerte zwischen -1 und 1, g zwischen -2 und 2 und h zwischen -3 und 3.

→ $a \cdot \cos(x)$ ist für a>1 im Vergleich zu $\cos(x)$ um a in Richtung der y-Achse gestreckt.

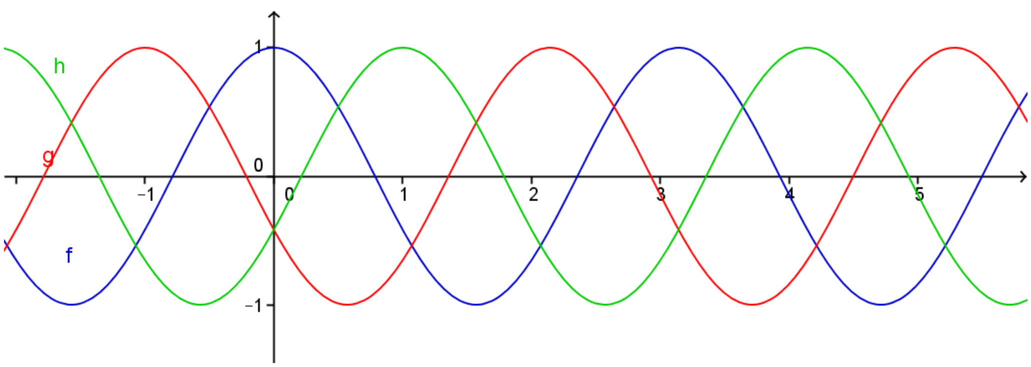
e) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$, $h(x) = \frac{1}{3}\sin(x)$, …



Die Graphen von g und h sind im Vergleich zu f in Richtung der y-Achse gestaucht; f hat Funktionswerte zwischen 1 und -1, g zwischen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ und h zwischen $\frac{1}{3}$ und $-\frac{1}{3}$

→ $a \cdot \sin(x)$ ist für a<1 im Vergleich zu $\sin(x)$ um a in Richtung der y-Achse gestaucht.

f) $f(x) = \cos(2x)$, $g(x) = \cos(2 \cdot (x+1))$, $h(x) = \cos(2 \cdot (x-1))$, …



Der Graph von g ist im Vergleich zu f um 1 Einheit nach links verschoben, derjenige von h um 1 Einheit nach rechts verschoben.

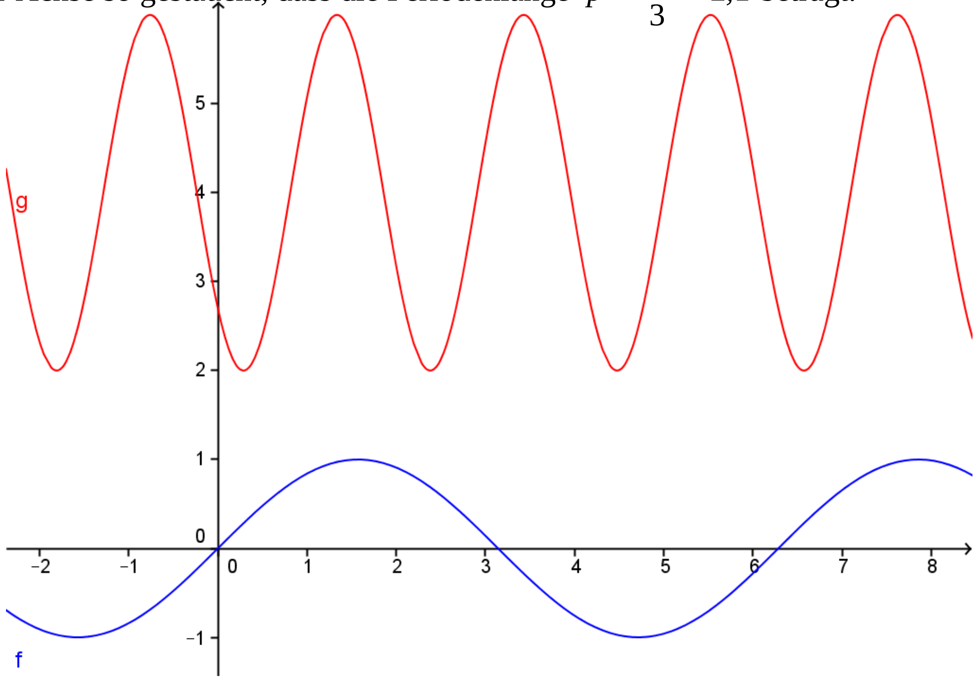
→ $\cos(b \cdot (x+c))$ ist im Vergleich zu $\cos(b \cdot x)$ um c Einheiten nach links verschoben, wenn c>0 ist und um c Einheiten nach rechts verschoben, wenn c<0 ist.

Alle festgestellten Regeln gelten sowohl für sin als auch für cos.

LÖSUNG Aufgabe 2:

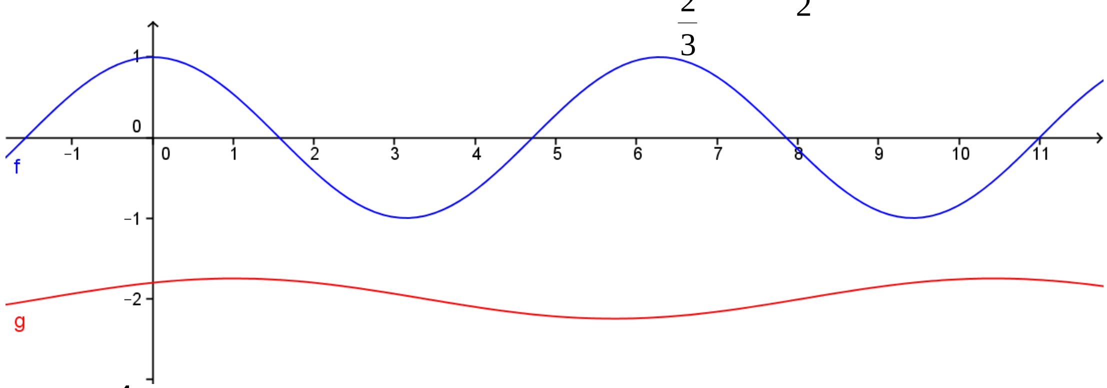
a) Wie müsste man nach den Regeln, die Sie in Aufgabe 1 gefunden haben, den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ verändern um, denjenigen der Funktion $g(x) = 2\sin(3 \cdot (x-5)) + 4$ zu erhalten?

Antwort: Der Graph von g ist um 5 Einheiten nach rechts und um 4 Einheiten nach oben verschoben. Er ist in Richtung der y-Achse um den Faktor 2 gestreckt und in Richtung der x-Achse so gestaucht, dass die Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}1$ beträgt.



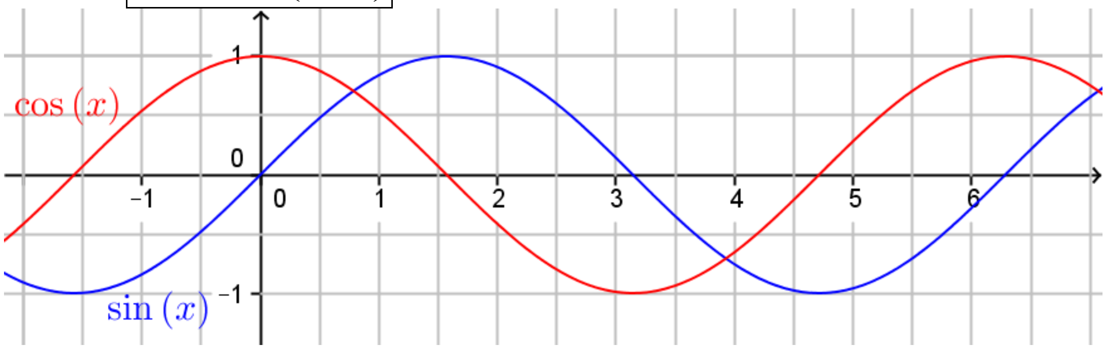
b) Wie müsste man den Graphen der Funktion $f(x) = \cos(x)$ verändern, um den Graphen der Funktion $g(x) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2}{3} \cdot (x-1)\right) - 2$ zu erhalten?

Antwort: Der Graph ist um 2 Einheiten nach unten und um 1 Einheit nach rechts verschoben. Er ist in Richtung der y-Achse um den Faktor $\frac{1}{4}$ gestaucht und in Richtung der x-Achse so gestaucht, dass die Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi \approx 9{,}4$ beträgt.



c) Wie müsste man den Graphen der Funktion $f(x)=\cos(x)$ verändern, um den Graphen der Funktion $g(x)=\sin(x)$ zu erhalten?
Anwort: Der Graph müsste um eine viertel Periode nach **rechts** verschoben werden, also

$$\boxed{\sin(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$



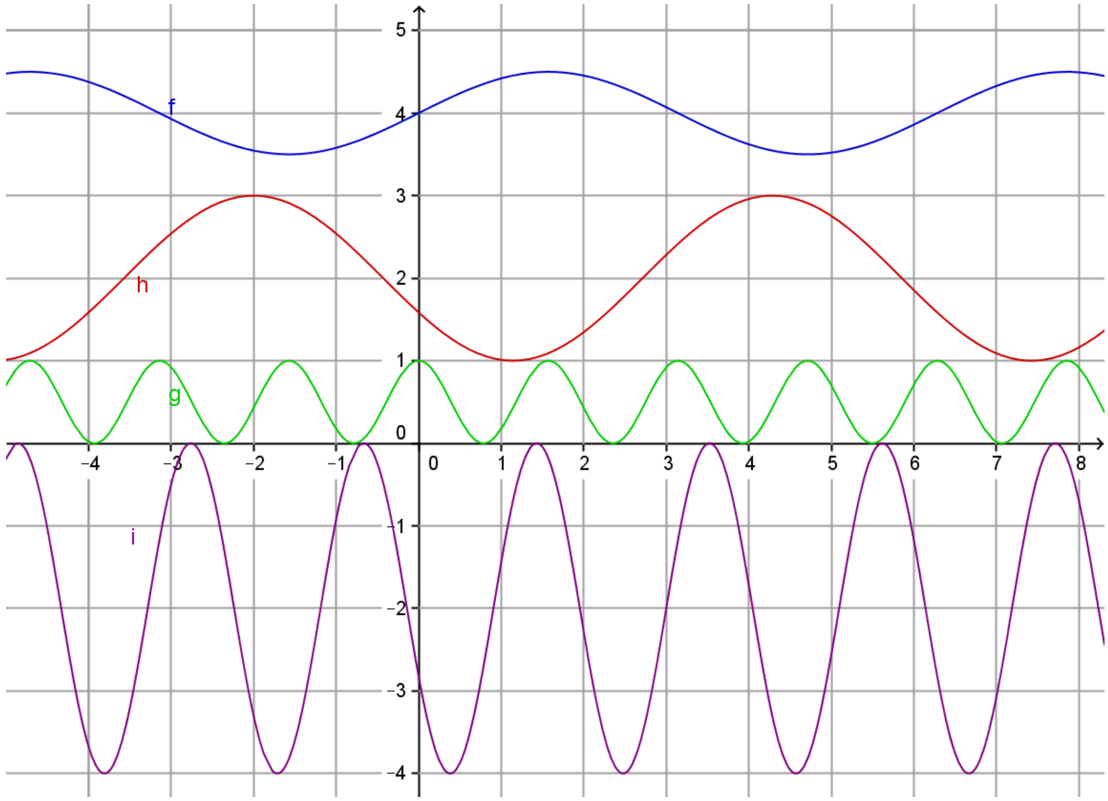
d) Wie müsste man den Graphen der Funktion $f(x)=\sin(x)$ verändern, um den Graphen der Funktion $g(x)=\cos(x)$ zu erhalten?
Anwort: Der Graph müsste um eine viertel Periode nach **links** verschoben werden, also

$$\boxed{\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Aufgabe 3: Geben Sie Funktionsgleichungen an, die zu den Graphen passen, indem Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 1 verwenden.

siehe nächste Seite.

Periodische Funktionen



f(x) = 0,5 sin (x) + 4	oder	f(x) = 0,5 cos (x-π/2) + 4
g(x) = 0,5 cos (4x) + 0,5	oder	g(x) = 0,5 sin (4x+π/2) + 0,5
h(x) = cos(x + 2) + 2	oder	h(x)=sin(x+2+π/2)+2
i(x) = 2sin(3 (x - 3)) - 2	oder	i(x)=2cos(3(x-3)- π/2)-2

Hinweis: Unterschied zwischen $f(x) = \sin\left(2(x-c)\right)$ und $f(x) = \sin\left(2x - e)\right)$.

$f(x) = \sin\left(2(x-c)\right)$: Um c **Einheiten** nach rechts verschoben.

$f(x) = \sin\left(2x - e)\right)$: Um einen **Anteil der Periode** nach rechts verschoben:

$e = \pi \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{2} Periode$, $e = \frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{4} Periode$, $e = \frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{8} Periode$, usw.