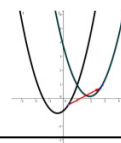


# Exponentialfunktionen

## LÖSUNG:



### Aufgabe 1:

Die Annahme lautet, dass das Wachstum der Naschbärenpopulation exponentiell ist. **Damit sollte die Population in gleichen Zeiträumen um den gleichen Prozentsatz zunehmen.** Es gilt:

$$\frac{N(t=2)}{N(t=0)} = \frac{35}{20} = 1,75 \quad (175\%) ; \quad \frac{N(t=4)}{N(t=2)} = \frac{61}{35} = 1,74 \quad (174\%)$$



Die Zahlen stimmen ungefähr überein; wir können also von einem exponentiellen Wachstum ausgehen. Ansatz für eine Funktionsgleichung:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t \quad (\text{mit dem Anfangswert } N_0 \text{ und dem Wachstumsfaktor } a; t \text{ ist die Zeit in Jahren})$$

Aus der Aufgabe ist ersichtlich, dass  $N_0 = 20$  ist. Der Wachstumsfaktor ergibt sich (zunächst für Zwei-Jahres-Schritte!) als Mittelwert der oben berechneten Zunahmen, also  $a$  (2 Jahre)  $\approx 1,745$ . Um den Wachstumsfaktor für Ein-Jahres-Schritte zu erhalten, müssen wir die Wurzel aus diesem Wert ziehen:  $a \approx 1,32$ . Oder:

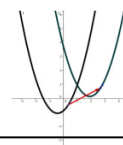
$$N(t) = N_0 \cdot (a^2)^t = N_0 \cdot 1,75^t$$

Der Wachstumsfaktor ist folglich 1,32 und damit lautet die gesuchte Funktion:

$$N(t) = 20 \cdot 1,32^t$$

# Exponentialfunktionen

## LÖSUNG:



### Aufgabe 2:

Um den Zeitpunkt  $t$  zu berechnen, an dem 100 Naschbären im Habitat leben, muss die Gleichung  $100 = 20 \cdot 1,32^t$  nach  $t$  aufgelöst werden. Division durch 20 und Bildung eines Logarithmus (beliebiger Basis, z.B. Zehnerlogarithmus) auf beiden Seiten ergibt:

$$\lg 5 = \lg 1,32^t$$

Nach dem Logarithmusgesetz kann man den Exponenten  $t$  als Faktor vorziehen und erhält:

$$\lg 5 = t \cdot \lg 1,32$$

Division durch  $\lg 1,32$  ergibt  $t \approx 5,79$ , d.h. nach ca. 5 Jahren, 9 Monaten und 2 Wochen leben ca. 100 Naschbären im Süßholzhabitat.

### Addituminformation:

Angenommen Sie wollen die **Vermehrungsrate** der Naschbären bestimmen. Sie ist die **Änderung** der Anzahl der Naschbären **pro Zeit**. Mit zunehmender Populationsgröße nimmt auch die Zahl der pro Zeiteinheit hinzukommenden Naschbären zu, d.h. die Vermehrungsrate ist keine Zahl, sondern eine Funktion. Die beschriebene **Änderungsfunktion** ist die Ableitung von  $N(t)$ . Zur Berechnung der Ableitung kann man entweder die Ableitungsfunktion einer beliebigen Exponentialfunktion nachschlagen oder  $N(t)$  so abändern, dass man als Basis die eulersche Zahl  $e$  erhält<sup>1</sup>:

$$N(t) = 20 \cdot e^{t \cdot \ln 1,32}$$

Dabei ist  $\ln$  die natürliche Logarithmusfunktion, d.h. die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit der Basis  $e$ . Die Ableitungsfunktion berechnet sich dann mit Hilfe der Kettenregel. Das Ergebnis lautet:

$$N'(t) = 20 \cdot \ln 1,32 \cdot e^{t \cdot \ln 1,32} \quad \text{oder} \quad N'(t) = 20 \cdot \ln 1,32 \cdot 1,32^t$$

Diese ist die gesuchte Vermehrungsrate.

---

<sup>1</sup> Die eulersche Zahl  $e$  ist eine reelle Zahl,  $e = 2,718281828\dots$