

Elementargeometrie

Prof. Dr. Andreas Meister

SS 2004

Geplanter Vorlesungsverlauf	1
Graphentheorie	1
<i>Beispiel 1.1: (Königsberger Brückenproblem)</i>	1
<i>Beispiel 1.2: (GEW - Problem)</i>	2
<i>Definition 1.1: Graph</i>	3
<i>Beispiel 1.3:</i>	3
<i>Beispiel 1.4:</i>	4
<i>Definition 1.2: (Netz)</i>	5
<i>Beispiel 1.5:</i>	5
<i>Definition 1.3:</i>	8
<i>Beispiel 1.6:</i>	8
<i>Definition 1.4:</i>	9
<i>Beispiel 1.7:</i>	9
<i>Definition 1.5:</i>	10
<i>Beispiel 1.8:</i>	11
<i>Satz 1.1:</i>	12
<i>Satz 1.2:</i>	13
<i>Satz 1.3:</i>	13
<i>Folgerung 1.1:</i>	16
<i>Beispiel 1.10:</i>	17
<i>Bemerkung 1.2:</i>	18
PLÄTTBARKEIT	19
<i>Wir sehen $E - K + F = 2$</i>	20

Satz 1.4: Eulersche Formel (oder Eulerscher Polyedersatz) 20

Satz 1.5: 23

Definition 1. 6: 24

Satz 1.6: 24

Beispiele 1.12: 25

Beispiel 1.13: 27

Satz 1.7 (Kuratowski) 28

Geplanter Vorlesungsverlauf

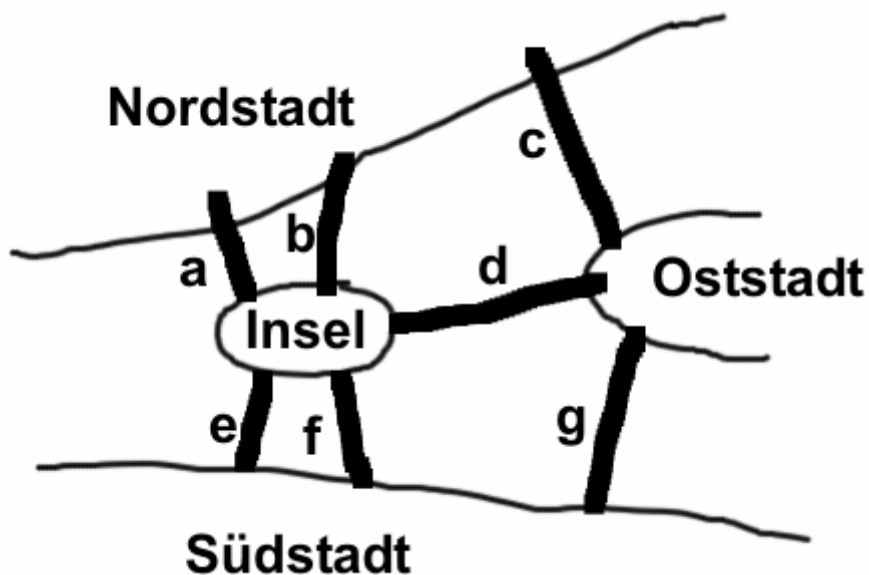
- Graphen und Netze
- Ebene Figuren (Geraden, Winkel, Dreiecke, Rechteck, Kreis etc.)
- Kongruenzabbildungen
- Ähnlichkeitsabbildungen
- Räumliche Figuren (Körper, Polyeder, Platonische Körper etc.)

Graphentheorie

Zwei grundlegende Problemstellungen der Graphentheorie stellen die beiden folgenden Probleme dar.

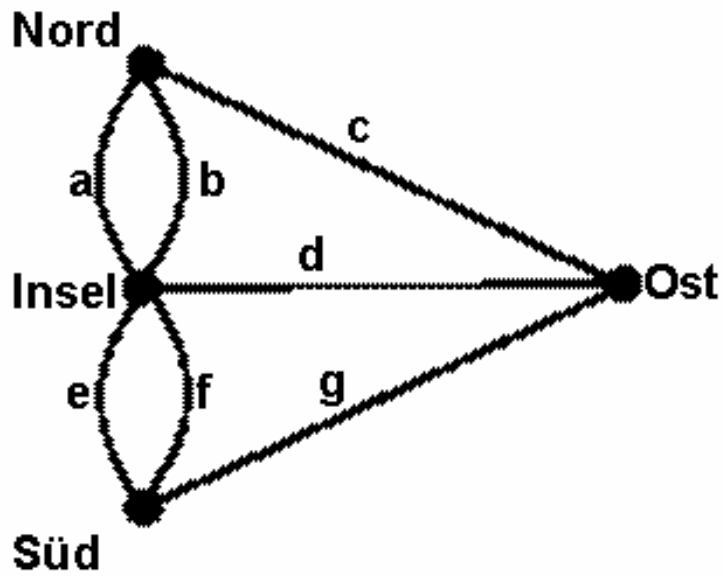
Beispiel 1.1: (Königsberger Brückenproblem)

In der Innenstadt von Königsberg fließen der alte und der neue Pregel zusammen. Hinter dem Zusammenfluss liegt eine Insel und es existierten im 18. Jh. 7 Brücken über die Flussarme.



Leonard Euler (1707-1783) stellte die Frage: Ist ein Spaziergang derart möglich, dass jede Brücke genau einmal überquert wird?

Etwas abstrakter und übersichtlicher lässt sich die Situation durch Punkte für die Stadtteile und Striche für die Brücken darstellen:



Derartige Problemstellungen treten in der Praxis beispielsweise bei

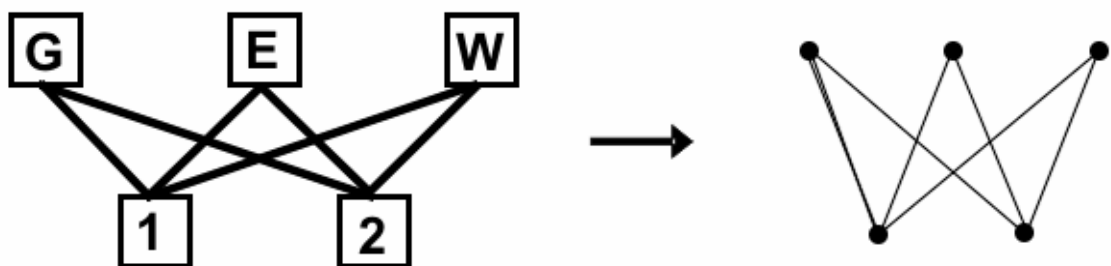
- der Müllabfuhr
- der Postzustellung

auf.

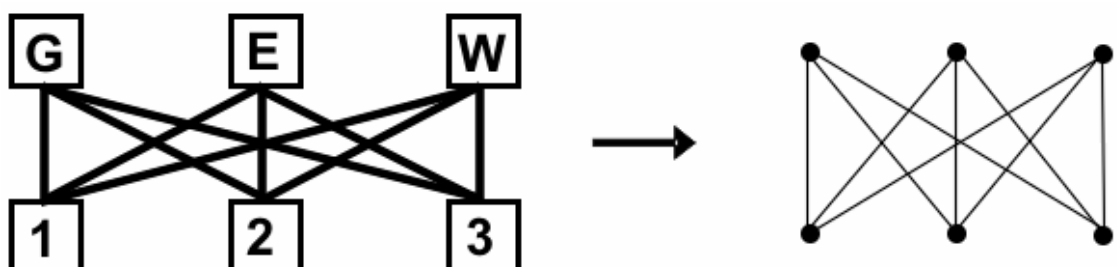
Beispiel 1.2: (GEW - Problem)

Zwei bzw. drei Häuser sollen an das Gas-, Elektrizitäts- und Wassernetz angeschlossen werden.

a) GEW_2 – Problem:



b) GEW_3 – Problem:



Hier stellt sich die Frage: Können die Häuser an die GEW - Werke angeschlossen werden, ohne dass sich Kreuzungen in den Zuleistungen ergeben?

Diese Frage führt auf den Begriff der „Plättbarkeit“ von Graphen und findet Anwendung bei:

- Kreuzungsfreier Straßenführung
- Herstellung von Platinen

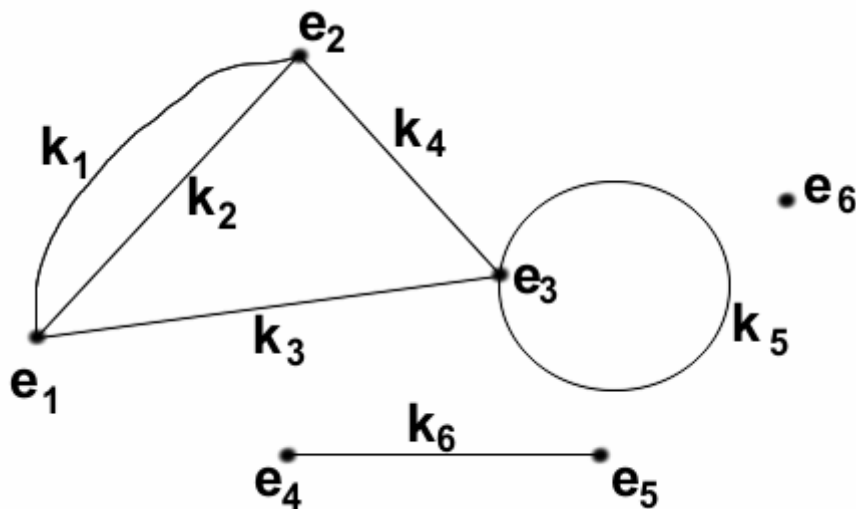
Definition 1.1: Graph

Es seien E und K zwei disjunkte Mengen (d.h. $E \cap K = \emptyset$). Wir nennen die Elemente e_1, \dots, e_n aus E Ecken (Knoten) und die Elemente k_1, \dots, k_m aus K Kanten (Bögen).

Weiter sei $E \neq \emptyset$ und $f: K \rightarrow E \times E = \{(e_i, e_j) \mid e_i, e_j \in E\}$ eine Abbildung, die jeder Kante genau zwei Ecken zuordnet. Das Tripel $G = (E, K, f)$ heißt (ungerichteter) Graph. Die Reihenfolge in den Tupel (e_i, e_j) ist unerheblich.

D.h. $(e_i, e_j) = (e_j, e_i)$.

Beispiel 1.3:



Es gelten:

$$E = \{e_1, \dots, e_6\}, K = \{k_1, \dots, k_6\} \text{ und } f : K \rightarrow E \times E$$

ist definiert durch:

$$f(k_1) = (e_1, e_2), f(k_2) = (e_1, e_2), f(k_3) = (e_1, e_3), f(k_4) = (e_2, e_3), f(k_5) = (e_3, e_3), \\ f(k_6) = (e_4, e_5)$$

Für den Graphen $G = (E, K, f)$ gibt es ein paar Besonderheiten:

- Es gilt $f(k_1) = (e_1, e_2) = f(k_2)$, d.h. die Ecken e_1, e_2 werden durch mehr als eine Kante verbunden. Man sagt dann der Graph besitzt Mehrfachkanten.
- Die Kante k_5 verbindet e_3 mit sich selbst. Solche Kanten werden Schlingen genannt.
- Die Ecke e_6 ist mit keiner Kante verbunden. Solche Knoten heißen isolierte Ecken.

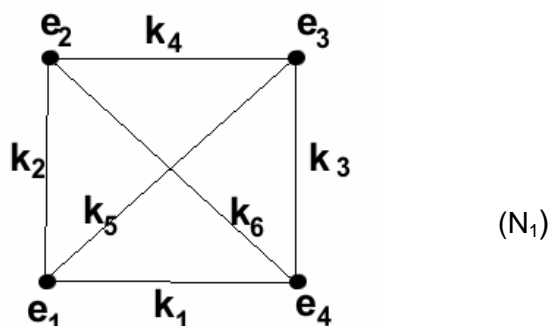
Beispiel 1.4:

Wir betrachten den durch $E = \{e_1, \dots, e_4\}, K = \{k_1, \dots, k_6\}$ und $f : K \rightarrow E \times E$ mit

$$f(k_1) = (e_1, e_4), f(k_2) = (e_1, e_2), f(k_3) = (e_3, e_4), f(k_4) = (e_2, e_3), f(k_5) = (e_1, e_3), \\ f(k_6) = (e_2, e_4) \text{ definierten Graphen } G = (E, K, f).$$

Um eine Vorstellung über die Zusammenhänge zu erhalten, stellen wir G geometrisch durch ein Netz dar.

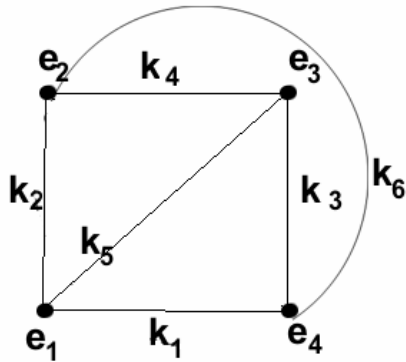
Eine Möglichkeit:



Eine derartige räumliche Darstellung nennen wir ein zum Graph gehörendes Netz.

Das Netz (N₁) weist Überschneidungen auf und wird daher als nicht kreuzungsfrei bezeichnet.

Wir können den Graph auch durch das folgende Netz (N_2) darstellen.
 Dieses Netz weist keine Überschneidungen auf und wird als kreuzungsfrei bezeichnet.

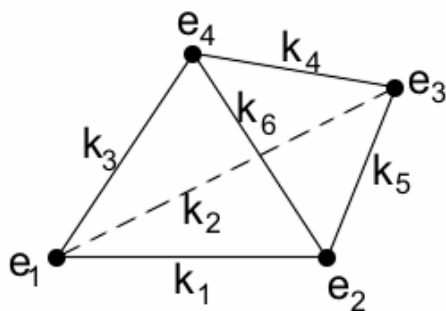


Definition 1.2: (Netz)

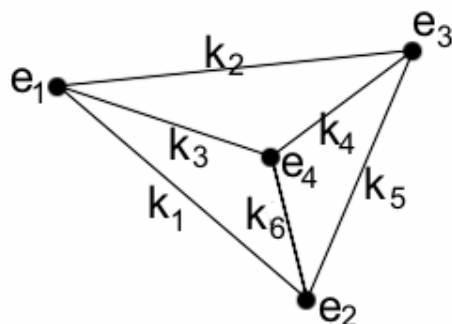
Ein Netz, das kreuzungsfrei in der Ebene liegt, heißt ebenes Netz. Zwei Netze heißen topologisch äquivalent, wenn sie mittels evtl. Ummummerierung der Kanten und Knoten durch den gleichen Graphen dargestellt werden können. Ein Netz heißt plättbar, wenn es topologisch äquivalent zu einem ebenen Netz ist.

Beispiel 1.5:

a) Tetraedernetz

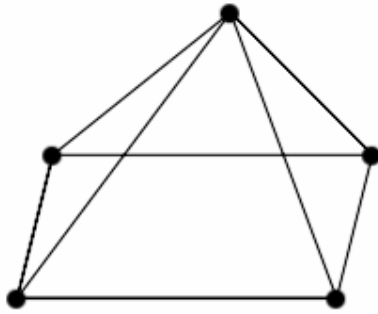


Das Netz ist topologisch äquivalent zu

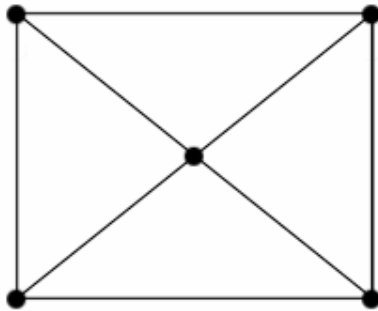


und folglich plättbar.

b) Pyramidennetz

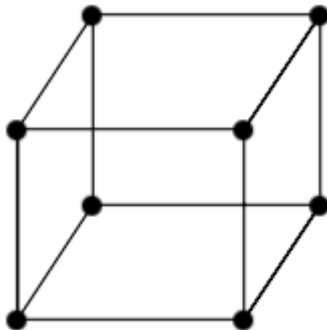


ist topologisch äquivalent zum ebenen Netz

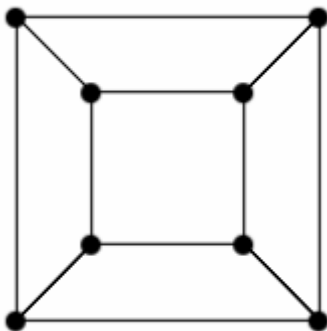


und folglich plättbar.

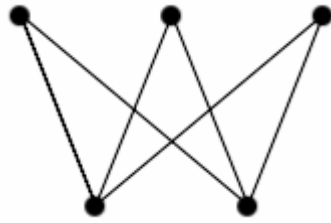
c) Würfelnetz



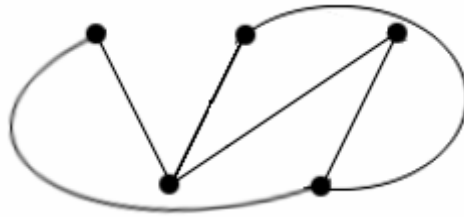
ist topologisch äquivalent zum ebenen Netz



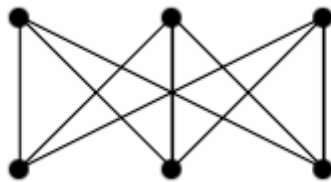
und folglich plättbar.

d) GEW_2 -Netz

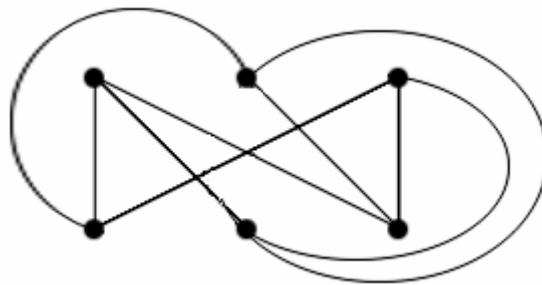
ist topologisch äquivalent zu



und folglich plättbar, d.h. kreuzungsfrei darstellbar.

e) GEW_3 -Netz

ist topologisch äquivalent zu



Aus Versuchen liegt die Vermutung nahe, dass das GEW_3 -Netz nicht plättbar ist.

Wir hatten bereits beim Beispiel 1.3 gesehen, dass bei einem ungerichteten Graphen die Reihenfolge der Ecken bei der Festlegung der Abbildung f unerheblich ist.

In der Darstellung

$$f(k_i) = (e_j, e_m)$$

nennen wir e_j die Anfangs- und e_m die Endecke der Kante k_i .

Definition 1.3:

Ein n -Tupel von Kanten $(k_1, \dots, k_n) \in K$ eines Graphen $G = (E, K, f)$ heißt Kantenzug, wenn sich das zugehörige n -Tupel

$$(f(k_1), \dots, f(k_n))$$

derart schreiben lässt, dass für $i = 1, \dots, n-1$ stets

$$\text{Anfangsecke von } k_{i+1} = \text{Endecke von } k_i$$

gilt.

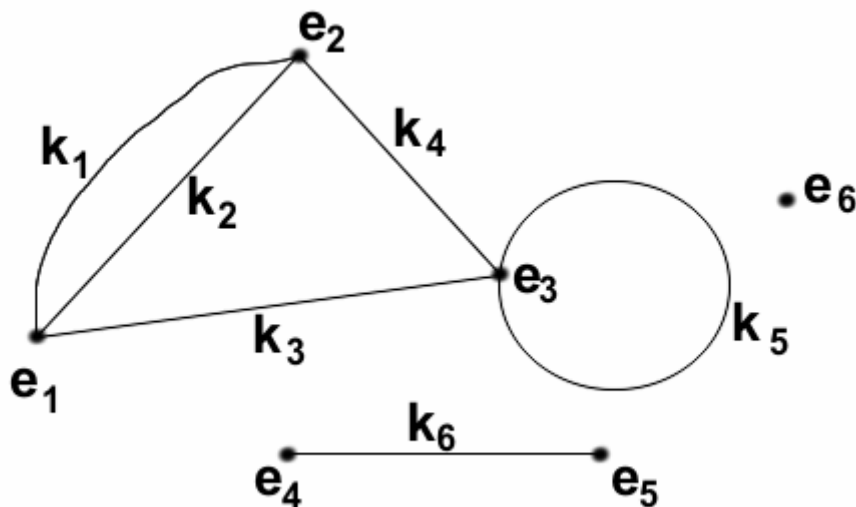
Die Anfangsecke (Endecke) der Kante k_1 (k_n) heißt Anfangsecke (Endecke) des Kantenzugs.

Kantenzüge, die denen alle Kanten verschieden voneinander sind heißen Weg.

Wir sprechen von einem geschlossenen (offenen) Weg, wenn die Anfangsecke des Weges mit der Endecke des Weges übereinstimmt (nicht übereinstimmt).

Beispiel 1.6:

Für den Graphen aus Beispiel 1.3 entnehmen wir der geometrischen Darstellung



a)

$$(k_1, k_4, k_5, k_4) \text{ ist wegen } f(k_1), f(k_4), f(k_5), f(k_4) \\ = (e_1, e_2)(e_2, e_3)(e_3, e_3)(e_3, e_2)$$

ein Kantenzug mit Anfangsecke e_1 und Endecke e_2 . Es handelt sich jedoch nicht um einen Weg.

b) $(k_1, k_2, k_3, k_6, k_4)$ ist kein Kantenzug, da $f(k_3)$ und $f(k_6)$ keine gemeinsamen Ecken beinhaltet.

c) (k_1, k_2, k_4, k_5) ist ein offener Weg.

d) (k_1, k_4, k_3) ist ein geschlossener Weg.

Definition 1.4:

Ein Graph $G = (E, K, f)$ heißt

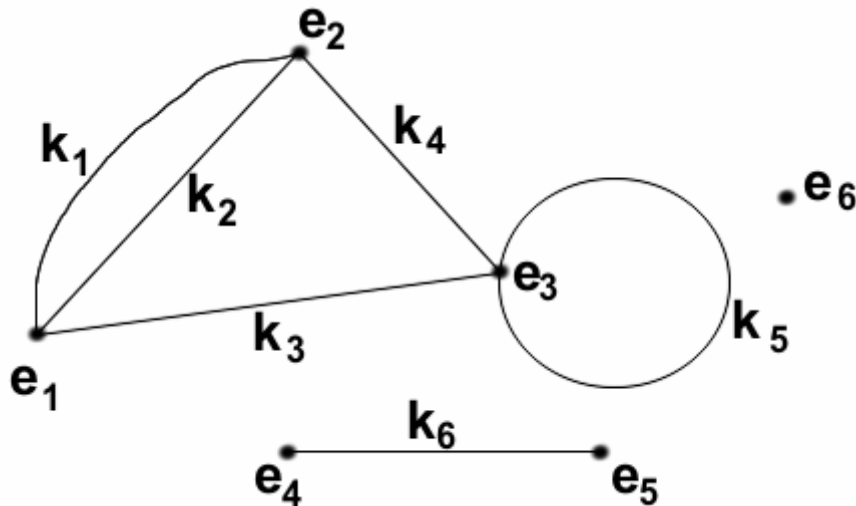
- (a) schlicht, wenn er keine Schlingen und Mehrfachkanten enthält.
- (b) zusammenhängend, wenn für zu je zwei Ecken $e_i, e_j \in E$ mit $e_i \neq e_j$ stets einen Kantenzug mit Anfangsecke e_i und Endecke e_j existiert.
- (c) plättbar, wenn der Graph durch ein ebenes (also kreuzungsfreies) Netz dargestellt werden kann.

Ein zusammenhängender Graph heißt unikursal, wenn es einen Weg gibt, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält. Ein derartiger Weg heißt Eulerscher Weg.

Ein zusammenhängender Graph heißt geschlossen unikursal, wenn ein geschlossener Eulerscher Weg existiert.

Beispiel 1.7:

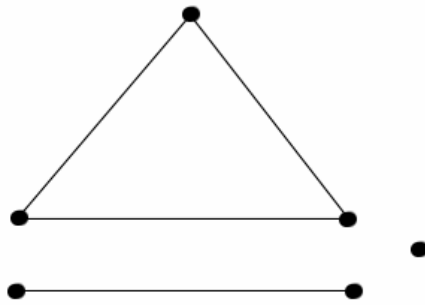
Für den Graphen aus Beispiel 1.3 gilt:



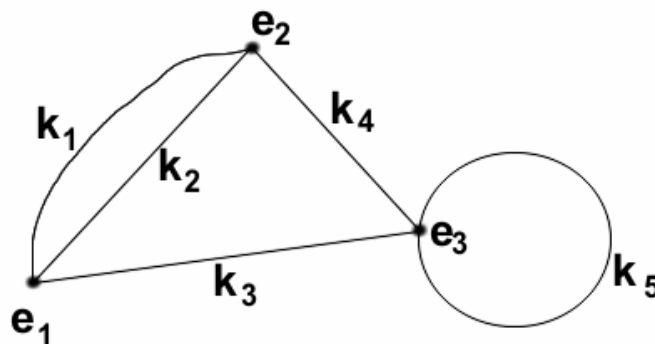
- 1) Der Graph ist nicht schlicht, da er eine Mehrfachkante (k_1, k_2) und eine Schlinge k_5 enthält.

Der Graph ist nicht zusammenhängend, da beispielsweise kein Kantenzug existiert, der e_4 und e_1 verbindet.

- 2) Entfernen der Kanten k_2 und k_5 führt zu einem schlichten, nicht zusammenhängenden Graphen.



- 3) Entfernen der Kante k_6 und der Ecken e_4, e_5, e_6 führt auf einen zusammenhängenden, nicht schlichten Graphen



Dieser Graph ist zudem unikursal, denn mit

$(k_1, k_2, k_3, k_5, k_4)$ liegt wegen

$$f(k_1), f(k_2), f(k_3), f(k_5), f(k_4) = (e_1, e_2)(e_2, e_1)(e_1, e_3)(e_3, e_3)(e_3, e_2)$$

ein Eulersche Weg vor.

Ist der Graph sogar geschlossen unikursal? → siehe Beispiel 1.10.

Um dieser Frage nachzugehen, benötigen wir folgende Begriffe.

Definition 1.5:

Sei $G = (E, K, f)$ ein Graph und $e_i \in E$ eine Ecke des Graphen. Die Häufigkeit mit der e_i als Komponente des Bildes einer Kante k unter der Abbildung f auftritt wird als Ordnung der Ecke, kurz $\text{ord}(e_i)$, bezeichnet.

Des Weiteren bezeichnen wir mit der

Eckenzahl $|E|$, die Anzahl der Ecken des Graphen

und mit der

Kantenzahl $|K|$, die Anzahl der Kanten des Graphen.

Beispiel 1.8:

Für unseren Graphen $G = (E, K, f)$ aus Beispiel 1.3 mit

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_6\}$$

$$K = \{k_1, k_2, \dots, k_6\}$$

und

$$f(k_1) = (e_1, e_2)$$

$$f(k_2) = (e_1, e_2)$$

$$f(k_3) = (e_1, e_3)$$

$$f(k_4) = (e_2, e_3)$$

$$f(k_5) = (e_3, e_3)$$

$$f(k_6) = (e_4, e_5)$$

gilt

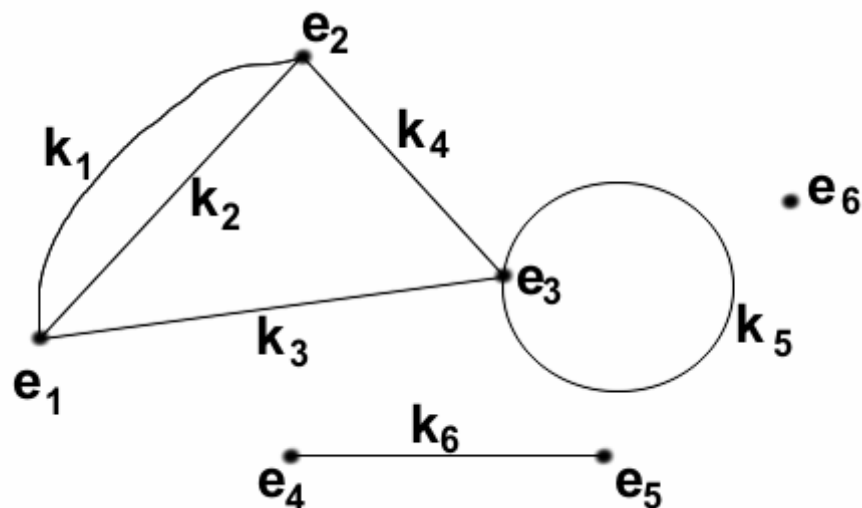
$$|E| = 6, |K| = 6$$

$$\text{ord}(e_1) = 3, \text{ord}(e_2) = 3$$

$$\text{ord}(e_3) = 4, \text{ord}(e_4) = 1$$

$$\text{ord}(e_5) = 1, \text{ord}(e_6) = 0$$

Leichter lässt sich die Ordnung einer Ecke aus einem zum Graphen gehörenden Netz ablesen.

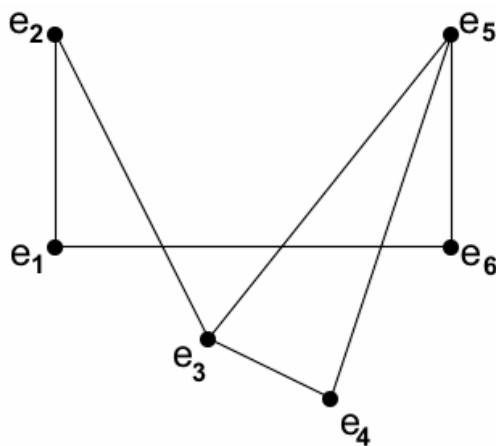


Die Ordnung entspricht demzufolge formal der Anzahl der Kantenberührungen.

Schlingen werden hierbei offensichtlich zweimal gezählt, da sie die gleiche Ecke als Anfangs- und Endecke besitzen.

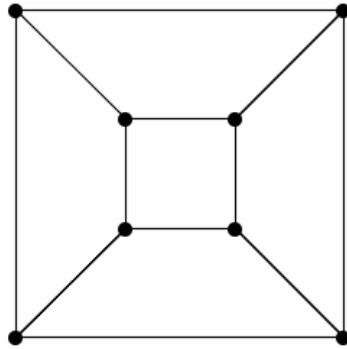
Beispiel 1.9:

a) Beliebiger Graph



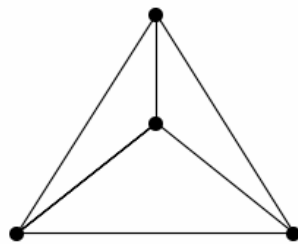
$$\begin{aligned}
 |E| &= 6 \\
 |K| &= 7 \\
 \sum_{i=1}^{|E|} \text{ord}(e_i) &= \sum_{i=1}^6 \text{ord}(e_i) \\
 &= 2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 \\
 &= 14
 \end{aligned}$$

b) Würfelgraph



$$\begin{aligned}
 |E| &= 8 \\
 |K| &= 12 \\
 \sum_{i=1}^{|E|} \text{ord}(e_i) &= 3 \cdot 8 = 24
 \end{aligned}$$

c) Tetraedergraph



$$\begin{aligned}
 |E| &= 4 \\
 |K| &= 6 \\
 \sum_{i=1}^{|E|} \text{ord}(e_i) &= 12
 \end{aligned}$$

In allen Beispielen gilt $\sum_{i=1}^{|E|} \text{ord}(e_i) = 2|K|$.

Satz 1.1:

Sei $G = (E, K, f)$ ein Graph. Dann ist die Summe der Eckenordnungen gleich

der doppelten Kantenzahl, d.h. $\sum_{i=1}^{|E|} \text{ord}(e_i) = 2|K|$.

Beweis:

Da jede Kante k durch f zwei Ecken e_i, e_j ($f(k) = (e_i, e_j)$) zugeordnet werden, erhöht jede Kante die Eckenordnung in der Summe um 2.

Bemerkung 1.1:

Satz 1.1 besagt, dass die Summe der Eckenordnungen eines Graphen stets eine gerade Zahl ist. Wir bezeichnen im Folgenden eine Ecke mit gerader bzw. ungerader Ordnung als gerade bzw. ungerade.

Satz 1.2:

Die Anzahl der ungeraden Ecken eines Graphen ist stets gerade.

Beweis:

Sei n_i die Anzahl der Ecken e mit $ord(e) = i$. Uns interessiert die Anzahl der Ecken mit ungerader Ordnung, d.h. $n = n_1 + n_3 + n_5 + \dots$

Laut Satz 1.1 gilt:

$$\begin{aligned}
 2|K| &= \sum_{i=1}^{|E|} ord(e_i) \\
 &= n_0 \cdot 0 + n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot 3 + \dots \\
 &= n + 2n_2 + 2n_3 + 4n_4 + 4n_5 + \dots \\
 &= n + 2(n_2 + n_3 + 2n_4 + 2n_5 + 3n_6 + \dots) \\
 &\Rightarrow n = 2(|K| - n_2 - n_3 - 2n_4 - 2n_5 - \dots) \\
 &\Rightarrow n \text{ ist gerade}
 \end{aligned}$$

Nun können wir notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz Eulerscher Wege bzw. geschlossener Eulerscher Wege herleiten.

Satz 1.3:

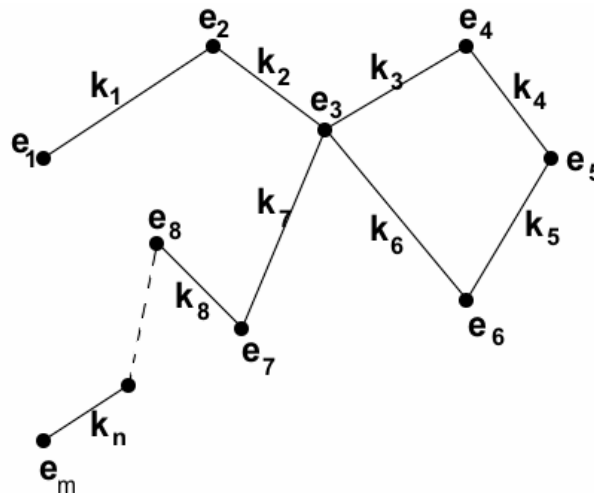
Ein zusammenhängender Graph ist genau dann unikursal, d.h. es existiert ein Eulerscher Weg, wenn maximal 2 ungerade Ecken existieren.

Beweis:

Sei $G = (E, K, f)$ zusammenhängend, dann gilt:

„ \Rightarrow “ Sei G unikursal (z.z. es existieren maximal 2 ungerade Ecken).
D.h. es existiert ein Eulerscher Weg, der ohne Beschränkung der

Allgemeinheit (o.B.d.A.) die Darstellung (k_1, k_2, \dots, k_n) mit $n = |K|$ hat.
 (Evtl. muss vorher umnummeriert werden.)



Für $i = 1, n-1$ gilt $f(k_i) = \text{Anfangsecke } f(k_{i+1})$, wodurch für diese Ecken die Ordnungszahl durch k_i und k_{i+1} um 2 erhöht wird. Lediglich die Anfangsecke von $f(k_1)$ und die Endecke von $f(k_n)$ können daher eine ungerade Ordnung besitzen.

Gilt $\text{Anfangsecke } f(k_1) = \text{Endecke } f(k_n)$, dann besitzen alle Ecken gerade Ordnung.

Gilt $\text{Anfangsecke } f(k_1) \neq \text{Endecke } f(k_n)$, dann besitzen die Anfangs- und Endecke des Kantenzuges ungerade und alle weiteren eine gerade Ordnung.

„ \Leftarrow “

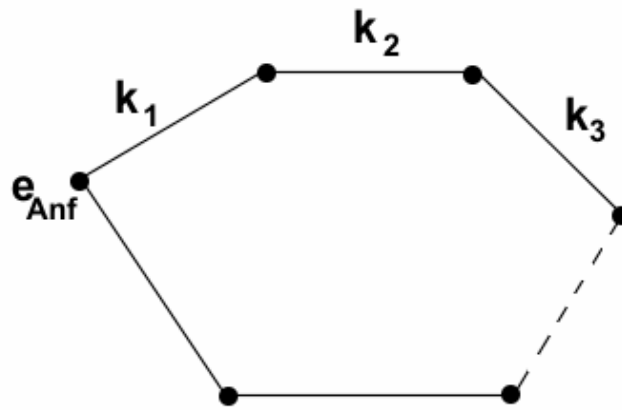
Es existieren maximal 2 ungerade Ecken. (z.z. G ist unikursal)

Wegen Satz 1.2 können nur die Fälle 0 ungerade Ecken, 2 ungerade Ecken vorliegen.

Fall 1:

Es existiert keine ungerade Ecke. Wir wählen eine beliebige Anfangsecke e_{Anf} .

Von e_{Anf} durchlaufen wir einen Weg (k_1, \dots, k_n)

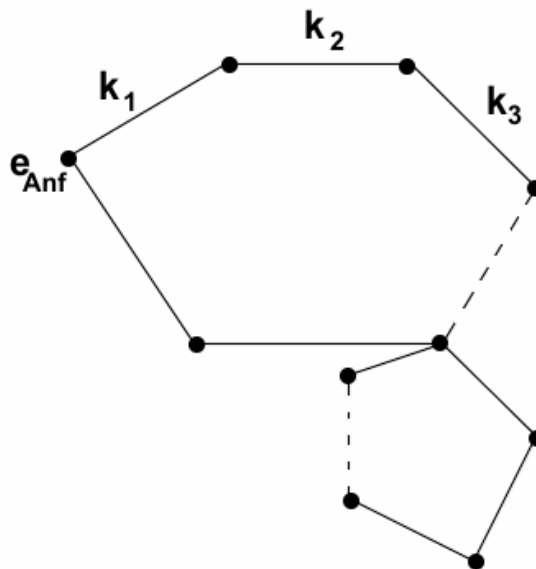


Auf diesem Weg fügen wir solange Kanten an, bis wir an die Ecke kommen, von der wir den Weg nicht fortsetzen können, da ansonsten eine Kante zweifach durchlaufen wird.

Der so erhaltene Weg muss geschlossen sein, da sonst e_{Anfang} wie auch die Endecke des Weges ungerade Ordnung aufweisen.

Haben wir alle Kanten des Graphen durchlaufen, so liegt mit k_1, \dots, k_n der gesuchte Eulersche Weg vor und G ist unikursal.

Existieren noch weitere Kanten, so existiert, da G zusammenhängend ist, eine Ecke e_i , die bereits im Weg (k_1, \dots, k_n) erreicht wurde und von der weitere Kanten ausgehen.



Von dieser Ecke e_i läuft demnach ein weiterer Weg $(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_m)$ von

Kanten, die noch nicht verwendet wurden mit

Anfangsecke $f(\tilde{k}_1) = \text{Endecke } f(\tilde{k}_m)$.

Zusammengefasst liegt mit $(k_1, \dots, k_{i-1}, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_m, k_i, \dots, k_n)$ ein

geschlossener Weg vor.

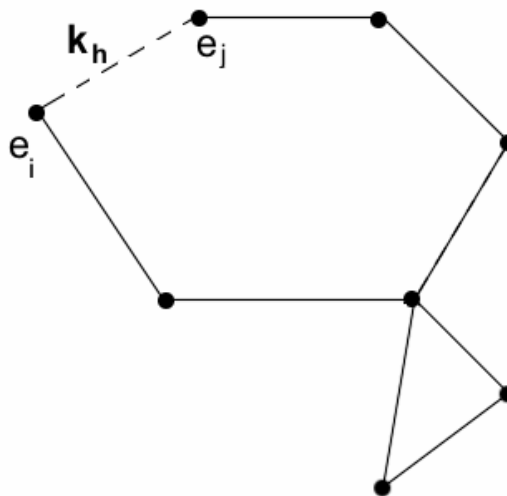
Der Prozess wird endlich oft wiederholt, bis alle Kanten genutzt werden. Das ist möglich, da jeder Graph nur endlich viele Kanten besitzt.

Der zuletzt erhaltene Weg repräsentiert dann den gesuchten Eulerschen Weg, der per Konstruktion sogar geschlossen ist.

Der Graph ist folglich geschlossen unikursal.

Fall 2:

Es gibt 2 Ecken ungerader Ordnung, die seien e_i, e_j . Wir fügen eine Hilfskante k_h mit $(k_h) = (e_i, e_j)$ ein. Der so generierte Graph G^* ist zusammenhängend und besitzt keine ungerade Ecke. Folglich existiert ein geschlossener Eulerscher Weg (h_k, k_1, \dots, k_n) dessen Anfangs- und Endecke e_i ist.



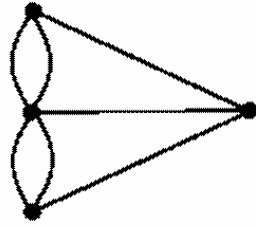
Mit (k_1, \dots, k_n) liegt damit ein Eulerscher Weg von e_j nach e_i vor. Der Graph ist folglich unikursal.

Folgerung 1.1:

Ein zusammenhängender Graph ist genau dann geschlossen unikursal, wenn keine ungerade Ecke existiert.

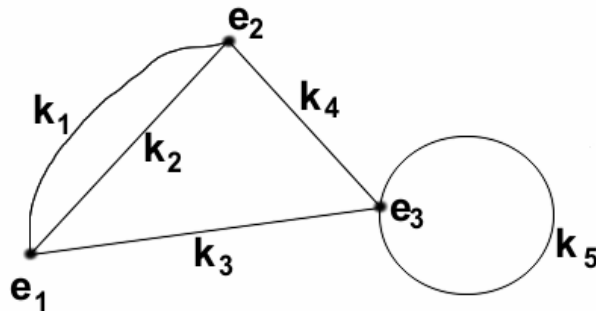
Beispiel 1.10:

- a) Für das Königsberger Brückenproblem haben wir das Netz:



Der zugehörige Graph ist offensichtlich zusammenhängend. Des Weiteren weisen alle 4 Ecken eine ungerade Ordnung aus, sodass der Graph nicht unikursal ist. Es existiert also *kein Eulerscher Weg*.

- b) Für unseren zusammenhängenden Graphen aus Beispiel 1.7 liegt das Netz

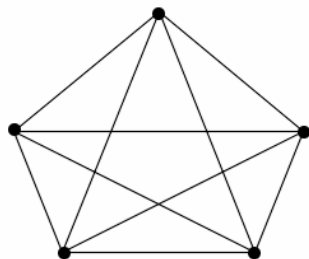


vor. Es gilt

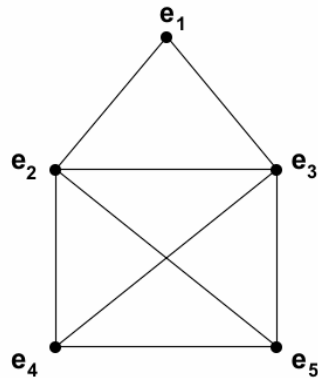
$$\text{ord}(e_1) = 3; \text{ord}(e_2) = 3; \text{ord}(e_3) = 4$$

→ Der Graph ist unikursal, aber nicht geschlossen unikursal.

- c) Für den Graphen G mit zugehörigem Netz weisen alle Ecken die Ordnung 4 auf. Da G zusammenhängend ist, ist G geschlossen unikursal.



d) Der Nikolausgraph mit Netz ist



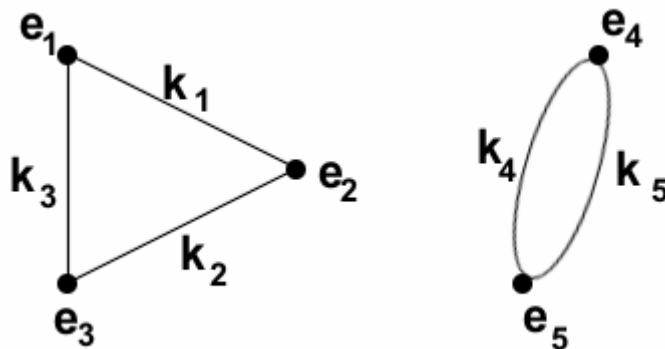
zusammenhängend und es gelte

$$\text{ord}(e_1) = 2; \text{ord}(e_2) = 4; \text{ord}(e_3) = 4; \text{ord}(e_4) = 3; \text{ord}(e_5) = 3$$

→ Somit ist der Graph unikursal, aber nicht geschlossen unikursal.

e) Warum ist es wichtig, dass der Graph zusammenhängend ist?

Betrachten wir:



Alle Ecken haben gerade Ordnung. Dennoch existiert kein Eulerscher Weg, da von $\{k_1, k_2, k_3\}$ keine Verbindung zu $\{k_4, k_5\}$ besteht.

Die Teilgraphen sind dagegen zusammenhängend, sodass Satz 1.3 genutzt werden kann.

Bemerkung 1.2:

Wir wissen nun auch, dass bereits eine weitere Brücke in Königsberg einen Eulerschen Weg ermöglicht hätte.

Plättbarkeit

Wir werden uns nun dem Problem der Plättbarkeit von Graphen, d.h. deren Darstellbarkeit durch ein zugehöriges ebenes (kreuzungsfreies) Netz, zu.

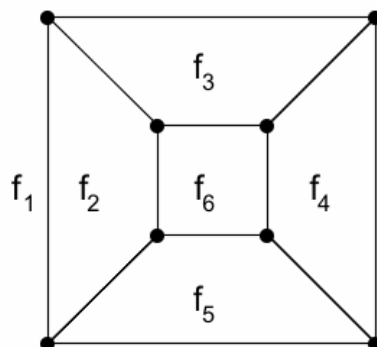
Vorgehen:

Wir weisen Eigenschaften ebener Netze nach und können hiermit gewisse Graphen als nicht plättbar identifizieren. Hiermit liegen notwendige Bedingungen für Plättbarkeit vor. Anschließend geben wir hinreichende Bedingungen hierfür an.

Innerhalb eines ebenen Netzes bezeichnen wir die voneinander durch Kanten getrennten Flächen mit f_1, f_2, \dots . Für die Menge aller dieser Flächen $F = \{f_1, f_2, \dots\}$ bezeichnet $|F|$ die Flächenzahl, die die Anzahl der Flächen angibt.

Beispiel 1.11:

a) Würfelgraph



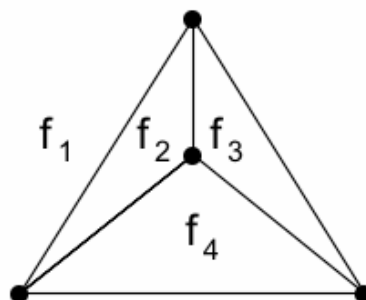
$$|F| = 6$$

$$|E| = 8$$

$$|K| = 12$$

$$\Rightarrow |E| - |K| + |F| = 2$$

b) Tetraedergraph



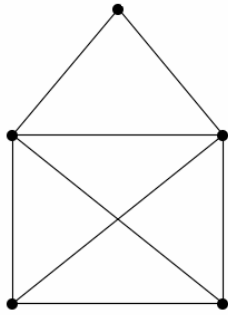
$$|F| = 4$$

$$|E| = 4$$

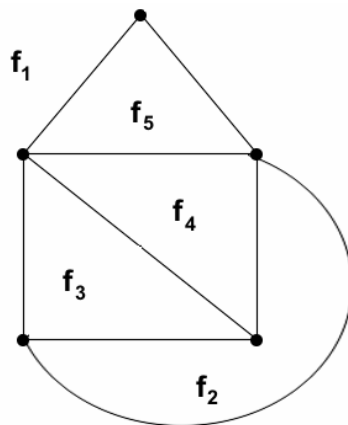
$$|K| = 6$$

$$\Rightarrow |E| - |K| + |F| = 2$$

c) Haus vom Nikolaus



topologisch äquivalent zu



$$|F| = 5$$

$$|E| = 5$$

$$|K| = 8$$

$$\Rightarrow |E| - |K| + |F| = 2$$

Wir sehen $|E| - |K| + |F| = 2$

Alle dargestellten Graphen sind zusammenhängend. Wir vermuten einen Zusammenhang zwischen Ecken-, Kanten-, Flächenzahl.

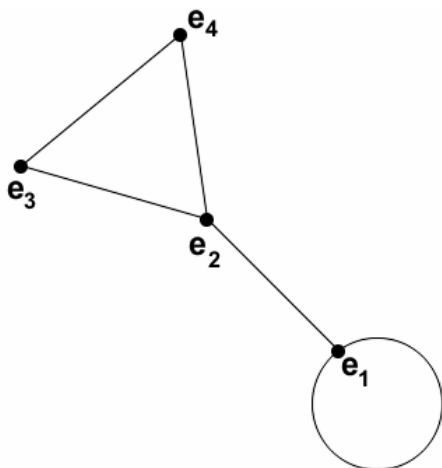
Satz 1.4: Eulersche Formel (oder Eulerscher Polyedersatz)

Sei $G = (E, K, f)$ ein plättbarer, zusammenhängender Graph, dann gilt in jedem zum Graphen gehörendem ebenen Netz: $|E| - |K| + |F| = 2$ wobei $|E|$ die Eckenanzahl, $|K|$ die Kantenanzahl und $|F|$ die Flächenanzahl repräsentiert.

Beweis:

Idee: Wir können jedes ebene Netz, das zu einem zusammenhängendem Graphen gehört dadurch aufbauen, dass beginnend von einer beliebigen Ecke sukzessiv Kanten und gegebenenfalls Ecken eingefügt werden.

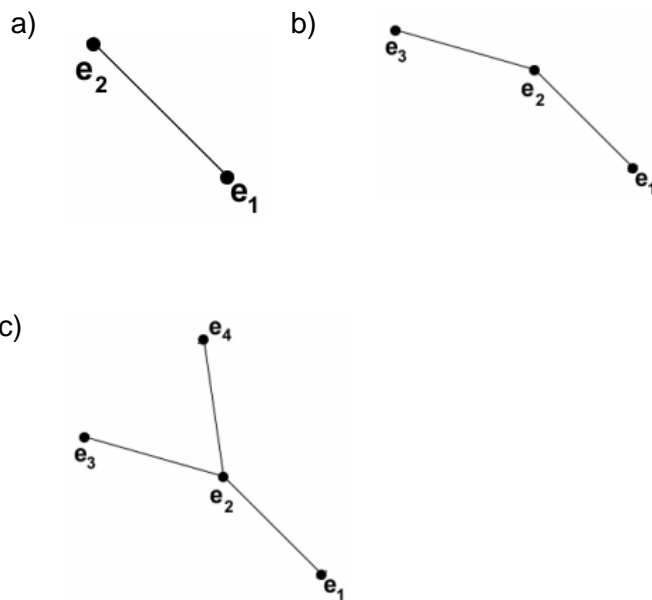
Beispielsweise gilt für:



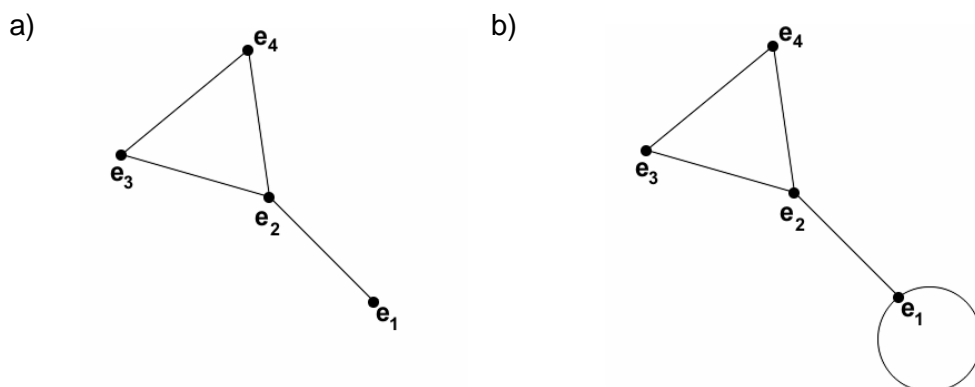
Aufbaumöglichkeit:

1.) Startecke (z.B. e_1)

2.) Einfügen einer Kante mit dazugehöriger Ecke



3.) Einfügen einer Kante zwischen zwei Ecken, die nicht notwendigerweise verschieden sind.



Da der Graph zusammenhängend ist, kann durch diese Operation das komplette ebene Netz aufgebaut werden.

Beim konstruktiven Beweis bleibt nun zu zeigen

- I) Das Startnetz besteht aus einer Ecke und erfüllt $|E| - |K| + |F| = 2$
- II) Die angegebenen Netzerweiterungen verändern $|E| - |K| + |F|$ nicht.

Zu I):

Es gilt für das Netz besteht aus e_1 :



$$|E| = 1, |K| = 0, |F| = 1 \Rightarrow |E| - |K| + |F| = 2$$

Zu II):

- a) Einfügen einer Kante von e_i zu einer zusätzlichen Ecke e_j (siehe Punkt 2))

Es existiert kein geschlossener Weg der die neue Kante beinhaltet. Daher kann keine neue Fläche erzeugt worden sein.

Wir haben somit

$$|E| \text{ steigt um } 1,$$

$$|K| \text{ steigt um } 1,$$

$$|F| \text{ bleibt konstant}$$

wodurch

$$|E| - |K| + |F| \text{ konstant bleibt.}$$

- b) Einfügen einer neuen Kante zwischen zwei bestehenden Ecken e_i, e_j mit $e_i \neq e_j$ oder $e_i = e_j$. Hierdurch liegt ein neuer geschlossener Weg vor, der eine neue Fläche beinhaltet.

Damit gelten

$$|E| \text{ bleibt konstant,}$$

$$|K| \text{ steigt um } 1,$$

$$|F| \text{ steigt um } 1$$

wodurch

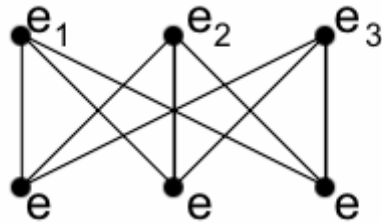
$$|E| - |K| + |F| \text{ konstant bleibt.}$$

Satz 1.5:

Der GEW_3 -Graph ist nicht plättbar.

Beweis:

Wir haben ein zum Graphen gehörendes Netz



Der GEW_3 -Graph ist offensichtlich zusammenhängend. Zudem gibt es keine Kante zwischen den Werken e_1, e_2, e_3 wie auch zwischen den Häusern e_4, e_5, e_6 und es treten keine Mehrfachkanten auf.

Ein geschlossener Weg beinhaltet daher mindestens 4 Kanten, da er mindestens von einem Werk über ein Haus zu einem zweiten Werk und dann über ein zweites Haus zurück zum Ausgangswerk führen muss.

Ein geschlossener Weg aus 2 Kanten existiert nicht, da keine Mehrfachkanten vorliegen.

Eine Fläche wird daher mindestens von 4 Kanten umrandet.

Wir führen nun einen Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis).

Annahme: GEW_3 -Graph ist plättbar.

Da der Graph zusammenhängend ist erhalten wir aus Satz 1.4

$$|E| - |K| + |F| = 2$$

da $|E| = 2$ und $|K| = 9$ gilt, folgt

$$|F| = 2 - |E| + |K| = 5$$

Da jede Fläche mindestens durch 4 Kanten umrandet wird, liegen mindestens

$$5 \cdot 4 = 20$$

Grenzen vor. Da jede Kante maximal Grenze zu zwei Flächen sein kann, ergibt sich eine Mindestzahl von 10 Kanten im Widerspruch zu $|K| = 9$.

Folglich kann der GEW_3 -Graph nicht plättbar sein.

Definition 1. 6:

Ein Graph $G = (E, K, f)$ heißt vollständig, wenn für je zwei verschiedene Ecken $e_i, e_j \in E, e_i \neq e_j$ eine direkte Verbindung besteht, das heißt ein

$k_m \in K$ mit $f(k_m) = (e_i, e_j)$ existiert.

Vollständige Graphen werden mit V_n bezeichnet, wobei n die Anzahl der Ecken repräsentiert, das heißt $n = |E|$ gilt.

Satz 1.6:

Sei $V_n = (E, K, f)$ der vollständige Graph mit n Ecken.

Dann gelten

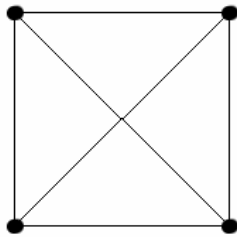
$$|K| = \frac{n(n-1)}{2}$$

und

$$\text{ord}(e_i) = n - 1 \text{ für alle } e_i \in E.$$

Beweis:

Zur Visualisierung betrachten wir ein Netz zu V_4



Im Allgemeinen ist jede Kante $e_j \in E$ mit allen $e_i \in E \setminus \{e_i\}$ verbunden. Aus

$$|E \setminus \{e_i\}| = n - 1 \text{ folgt } \text{ord}(e_i) = n - 1.$$

Die Summe der Eckenordnungen ist

$$\sum_{i=1}^n \text{ord}(e_i) = \sum_{i=1}^n (n-1) = n(n-1).$$

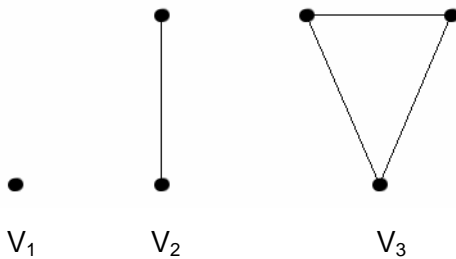
Mit Satz 1.1 gilt

$$\sum_{i=1}^n \text{ord}(e_i) = 2|K|,$$

womit $2|K| = n(n-1)$ und somit $|K| = \frac{n(n-1)}{2}$ folgt.

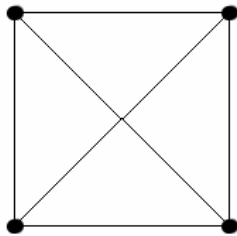
Beispiele 1.12:

Die vollständigen Graphen

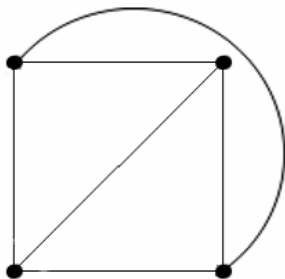


sind offensichtlich plättbar.

Für V_4 erhalten wir beispielsweise das Netz,

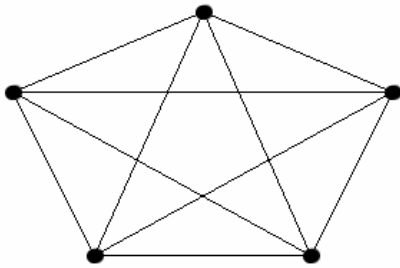


das topologisch äquivalent zu



ist und folglich V_4 ebenfalls plättbar ist.

Für V_5 ist die Betrachtung deutlich schwieriger.



Versucht man diesen Graphen durch ein ebenes Netz darzustellen, so scheitert man. Wir vermuten daher, dass V_5 nicht plättbar ist.

Da V_5 zusammenhängend ist, können wir für diese Untersuchung den Satz 1.4 nutzen.

Wir nehmen an, dass $V_5 = (E, K, f)$ plättbar ist. Dann folgt mit Satz 1.4

$$|E| - |K| + |F| = 2$$

Wir wissen $|E| = 5$ und mit Satz 1.6

$$|K| = \frac{5 \cdot (5 - 1)}{2} = 10$$

somit ergibt sich

$$|F| = 2 - |E| + |K| = 2 - 5 + 10 = 7.$$

Folglich müssen mindestens $7 \cdot 3 = 21$ Grenzen vorliegen, die mindestens 11 Kanten erfordern.

Wegen $|K| = 10 < 11$ liegt ein Widerspruch vor, wodurch nachgewiesen ist, dass V_5 nicht plättbar ist.

Mit Satz 1.4 können wir nun Graphen als nicht plättbar identifizieren, da es sich bei $|E| - |K| + |F| = 2$ um eine Schlussfolgerung aus der Plättbarkeit, d.h. ein notwendiges Kriterium für die Plättbarkeit handelt. Ein hinreichendes Kriterium, das die Plättbarkeit bei zusammenhängenden Graphen als Schlussfolgerung liefert, liegt nicht vor.

Mathematisch ausgedrückt haben wir

$$\text{Zusammenhängend} + \text{Plättbar} \Rightarrow |E| - |K| + |F| = 2$$

Uns fehlt

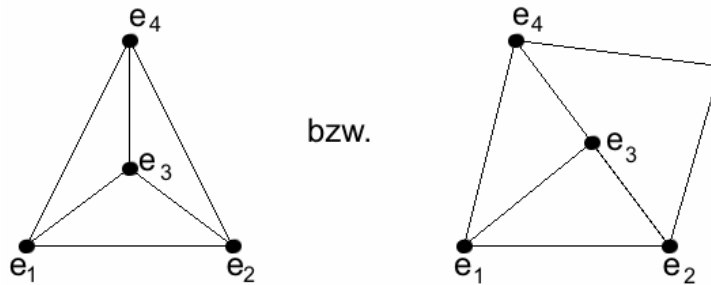
$$\text{Zusammenhängend} + \text{Eigenschaft} \Rightarrow \text{Plättbar}$$

Eine derartige Aussage wurde von Kuratowski bewiesen. Hierzu wird der Begriff des Teilgraphen verwendet. Ein Teilgraph eines Graphen entsteht durch sukzessive Vernachlässigung von Ecken der Ordnung 2 bzw. 0 und Kanten.

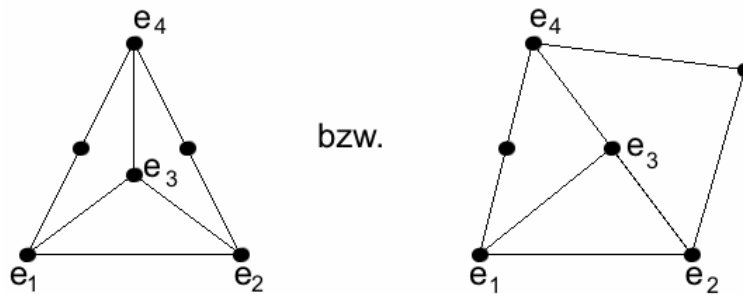
Des Weiteren verstehen wir unter einer Unterteilung eines Graphen, die Einfügung von Ecken auf existierende Kanten.

Beispiel 1.13:

a) Eine Unterteilung des Tetraedergraphen

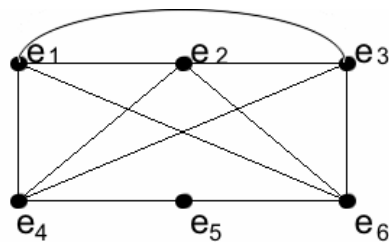


liegt zum Beispiel bei

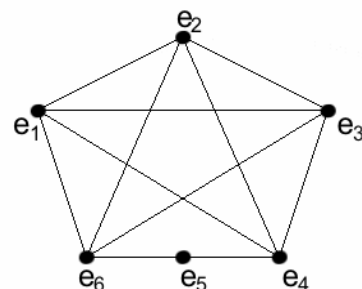


vor.

b) Wir sehen, dass Netz



topologisch äquivalent zum Netz



und damit der zugehörigen Graphen aus einer Unterteilung des V_5 hervorgeht.

Satz 1.7 (Kuratowski)

Ein zusammenhängender Graph ist genau dann nicht plättbar, wenn er dem vollständigen Graphen V_5 oder den GEW_3 -Graphen oder eine Unterteilung einer der beiden Graphen als Teilgraphen enthält.

Bemerkung 1.3:

Der zum Netz im Beispiel 1.13 b) gehörende Graph ist folglich nicht plättbar.