



Eulerscher Polyedersatz in der Ebene

Zusatzaufgabe

Erproben Sie, ob der Eulersche Polyedersatz auch für Parkettausschnitte gilt. (Parkettausschnitt als lückenlose Aneinanderreihung von Polygonen, die nicht zu einem Körper zusammen gesetzt werden können.)

Lösung:

Beweis über die Graphentheorie¹:

Behauptung: Für jedes Netz und jeden Parkettausschnitt gilt:

$$E - K + F = 1$$

Beweisschritt 1: Zum Beweis dieser Formel beginnt man mit dem einfachsten **Netz**, das **aus einer einzigen Ecke** besteht. Für dieses Netz gilt:

$$E - K + F = 1 - 0 + 0 = 1$$

Nun überlegt man sich, was passiert, wenn man *eine neue Kante hinzufügt*.

Man muss zwei Fälle unterscheiden.

Beweisschritt 2 (1. Fall): Eine bereits vorhandene Ecke wird durch eine **neue Kante mit einer neuen Ecke verbunden**. Wiederum bleibt der Polyedersatz gültig, weil diesmal die neue Ecke die neue Kante ausgleicht und dabei keine neue Fläche entsteht.

$$E - K + F = 2 - 1 + 0 = 1$$

Beweisschritt 3 (2. Fall): **Zwei bereits vorhandene Ecken werden untereinander verbunden**. Dadurch entsteht aber neben der zusätzlichen Kante auch eine neue Fläche. Die Netzformel bleibt also richtig, weil die neue Fläche die neue Kante ausgleicht.

$$E - K + F = 2 - 2 + 1 = 1$$

¹ Graphentheoretisch gib es nur 3 Aktionen:

1: ein neuer Punkt / 2: ein alter P wird mit einem neuen P mit einer Kante verbunden / 3: zwei vorhandene (alte) P werden miteinander mit einer Kante verbunden / Anm.: eine Kante muss nicht notwendiger Weise eine Strecke sein!