Wie man die Lösungen findet (alle lokalen Lösungen)?

Wenn 3 Ecken bei einer Parkettierung zusammenstoßen gilt:

Finde alle natürlichen Zahlen $k,l,m \geq 3$ mit $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$.

$k=3$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$. Weil $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ => $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{6}$

Also finde alle natürlichen Zahlen $l,m \geq 3$ mit $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{6}-\frac{1}{l}=\frac{1}{m}$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{7-6}{42}=\frac{1}{42} \qquad (7,42)$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{4-3}{24}=\frac{1}{24} \qquad (8,24)$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{3-2}{18}=\frac{1}{18} \qquad (9,18)$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5-3}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15} \qquad (10,15)$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{11}=\frac{11-6}{66}=\frac{5}{66}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12} \qquad (12,12)$$

Ich habe jetzt alle Zahlenpaare (l,m) gefunden, die die Gleichung $1/l+1/m=a=1/6$ lösen und für die $1/l \geq a/2$ gilt. Alle weiteren Lösungen entstehen durch Vertauschen von l und m. Ist nämlich (l^*,m^*) eine Lösung mit $1/l^* < a/2$, so folgt $1/m^* > a/2$, und (m^*,l^*) ist eine schon gefundene Lösung.

l muss hier alle natürlichen Zahlen mit $\frac{a}{2} \leq \frac{1}{l} < a$ durchlaufen.

Ich habe jetzt alle Lösungen, in denen eine 3 vorkommt. Es sind dies die Tripel $(3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15), (3,12,12)$ und deren Permutationen.

$\underline{k=4}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$. Weil $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ => $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{4}$

Also finde alle natürlichen Zahlen $l,m \geq 4$ mit $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}-\frac{1}{l}=\frac{1}{m}$.

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5-4}{20}=\frac{1}{20} \qquad (5,20)$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3-2}{12}=\frac{1}{12} \qquad (6,12)$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{7-4}{28}=\frac{3}{28}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8} \qquad (8,8)$$

Ich habe jetzt alle Lösungen, in denen eine 4 vorkommt.

$\underline{k=5}$; $\frac{1}{5}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$. Weil $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$ => $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{3}{10}$

Also finde alle natürlichen Zahlen $l,m \geq 5$ mit $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{3}{10}$.

$$\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{3-2}{10}=\frac{1}{10} \qquad (5,10)$$

$$\frac{3}{10}-\frac{1}{6}=\frac{9-5}{30}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$$

Es gilt $\frac{3}{10}-\frac{1}{7}=\frac{21-10}{70}=\frac{11}{70}>\frac{10}{70}=\frac{1}{7}$, also braucht man $l=7$ nicht mehr auszuprobieren.

Ich habe jetzt alle Lösungen, in denen eine 5 vorkommt.

$\underline{k=6}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{3-1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Finde alle natürlichen Zahlen $l,m \geq 6$ mit $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3} \qquad (6,6)$$

Ich habe jetzt alle Lösungen, in denen eine 6 vorkommt.

Ich habe jetzt alle Zahlentripel (k,l,m) gefunden, die die Gleichung $1/k + 1/l + 1/m = a = 1/2$ lösen und für die $1/k \geq a/3$ gilt. Alle weiteren Lösungen entstehen durch Permutieren von k, l und m. Ist nämlich (k^*, l^*, m^*) eine Lösung mit $1/k^* < a/3$, so folgt $1/l^* > a/3$ oder $1/m^* > a/3$. Dann gehören (l^*, k^*, m^*) oder (m^*, l^*, k^*) zu den schon gefundenen Lösungen.

k muss hier alle natürlichen Zahlen mit $\frac{a}{3} \leq \frac{1}{k} < a$ durchlaufen.

Die Zahlentripel	$(3,7,42)$, $(3,8,24)$, $(3,9,18)$, $(3,10,15)$, $(3,12,12)$
und	$(4,5,20)$, $(4,6,12)$, $(4,8,8)$
und	$(5,5,10)$
und	$(6,6,6)$

und deren Permutationen sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2};\ k,l,m \in \mathbb{N},\ k,l,m \geq 3.$$

Wie man die Lösungen findet (alle lokalen Lösungen)?

Wenn 4 Ecken bei einer Parkettierung zusammenstoßen gilt:

Finde alle natürlichen Zahlen $k, l, m, n \geq 3$ mit $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$.

$k=3$; $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Finde alle natürlichen Zahlen $l, m, n \geq 3$ mit $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{3}$.

$l=3$; $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Finde alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 3$ mit $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$ (4,12)

$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{5-3}{15}=\frac{2}{15}$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2-1}{6}=\frac{1}{6}$ $(6,6)$

Ich habe jetzt alle Zahlenpaare (m,n) gefunden, die die Gleichung $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$ lösen.

Ich habe jetzt alle Zahlentripel (l,m,n) gefunden, in denen eine 3 vorkommt und die die Gleichung $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{3}$ lösen.

$l=4$; $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8-3}{12}=\frac{5}{12}$

Finde alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 4$ mit $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{5}{12}$.

$\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{5-3}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ $(4,6)$

$\frac{5}{12}-\frac{1}{5}=\frac{25-12}{60}=\frac{13}{60}$

Es gilt $\frac{1}{6}=\frac{4}{24}<\frac{5}{24}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}$, d.h. ab jetzt können keine neuen Lösungen mehr auftreten. Ich habe also jetzt alle Zahlenpaare (m,n) gefunden, die die Gleichung $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{5}{12}$ lösen. Somit habe ich jetzt alle Zahlentripel (l,m,n) gefunden, in denen eine 4 vorkommt und die die Gleichung $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{3}$ lösen.

Es gilt $\frac{1}{5}=\frac{9}{45}<\frac{10}{45}=\frac{2}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$, d.h. ab jetzt können keine neuen Lösungen mehr auftreten. ($\frac{1}{3}\,von\,\frac{2}{3}$ ist der Durchschnittswert, den $\frac{1}{l},\frac{1}{m}\,und\,\frac{1}{n}$ haben können).

Ich habe also jetzt alle Zahlenquadrupel (k,l,m,n) gefunden, in denen eine 3 vorkommt und die die Gleichung $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$ lösen.

$\underline{k=4}$; $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Finde alle natürlichen Zahlen $l,m,n\geq 4$ mit $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{3}{4}$.

$\underline{l=4}$; $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

Finde alle natürlichen Zahlen $m,n\geq 4$ mit $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $\qquad (4,4)$

Ich habe jetzt alle Zahlenpaare (m,n) gefunden, die die Gleichung $1/m+1/n=1/2$ lösen.

Ich habe jetzt alle Zahlentripel (l,m,n) gefunden, in denen eine 4 vorkommt und die die Gleichung $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{3}{4}$ lösen.

Es gilt $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{a}{3}$.

Ich habe jetzt alle Zahlenquadrupel (k,l,m,n) gefunden, in denen eine 4 vorkommt und die die Gleichung $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$ lösen.

Es gilt $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{a}{4}$.

Die 4-Tupel $\qquad (3,3,4,12), (3,3,6,6), (3,4,4,6), (4,4,4,4)$
und deren Permutationen sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1;\ k,l,m,n\in\mathbb{N},\ k,l,m,n\geq 3.$$

Wie man die Lösungen findet (alle lokalen Lösungen)?

Wenn 5 Ecken bei einer Parkettierung zusammenstoßen gilt:

Finde alle natürlichen Zahlen $k, l, m, n, o \geq 3$ mit $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{o}=\frac{3}{2}$.

$\underline{k=3}$; $\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=\frac{9-2}{6}=\frac{7}{6}$ $\qquad \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}\leq\frac{1}{k}<\frac{3}{2}\wedge k\geq 3$ oder kurz $k=3$

Finde alle natürlichen Zahlen $l, m, n, o \geq 3$ mit $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{o}=\frac{7}{6}$.

$\underline{l=3}$; $\frac{7}{6}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ $\qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{6}\leq\frac{1}{l}<\frac{7}{6}\wedge l\geq 3$ oder kurz $l=3$

Finde alle natürlichen Zahlen $m, n, o \geq 3$ mit $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{o}=\frac{5}{6}$.

$\underline{m=3}$; $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}\leq\frac{1}{m}<\frac{5}{6}\wedge m\geq 3$ oder kurz $m=3$

Finde alle natürlichen Zahlen $n, o \geq 3$ mit $\frac{1}{n}+\frac{1}{o}=\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ $\qquad (3,6)$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ $\qquad (4,4)$

Die 5-Tupel $\qquad (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4)$

und deren Permutationen sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{o}=\frac{3}{2};\ k,l,m,n,o\in\mathbb{N},\ k,l,m,n,o\geq 3.$$

Die Gleichung

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{o}+\frac{1}{p}=2;\ k,l,m,n,o,p\in\mathbb{N},\ k,l,m,n,o,p\geq 3.$$

hat nur die Lösung $(3,3,3,3,3,3)$.