

Wie man die Lösungen findet (alle lokalen Lösungen)?

Wenn 3 Ecken bei einer Parkettierung zusammenstoßen gilt:

Finde alle natürlichen Zahlen $k, l, m \geq 3$ mit $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$.

$$\underline{k=3}; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}. \quad \text{Weil } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{6}$$

Also finde alle natürlichen Zahlen $l, m \geq 3$ mit

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{l} = \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{7-6}{42} = \frac{1}{42} \quad (7,42)$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{4-3}{24} = \frac{1}{24} \quad (8,24)$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3-2}{18} = \frac{1}{18} \quad (9,18)$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \quad (10,15)$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{11} = \frac{11-6}{66} = \frac{5}{66}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \quad (12,12)$$

Ich habe jetzt alle Zahlenpaare (l, m) gefunden, die die Gleichung $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = a = \frac{1}{6}$ lösen und für die $\frac{1}{l} \geq \frac{a}{2}$ gilt. Alle

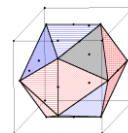
weiteren Lösungen entstehen durch Vertauschen von l und m .

Ist nämlich (l^*, m^*) eine Lösung mit $\frac{1}{l^*} < \frac{a}{2}$, so folgt

$\frac{1}{m^*} > \frac{a}{2}$, und (m^*, l^*) ist eine schon gefundene Lösung.

l muss hier alle natürlichen Zahlen mit $\frac{a}{2} \leq \frac{1}{l} < a$ durchlaufen.

Ich habe jetzt alle Lösungen, in denen eine 3 vorkommt. Es sind dies die Tripel $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$, $(3, 12, 12)$ und deren Permutationen.



$$\underline{k=4}; \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}. \quad \text{Weil } \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{4}$$

Also finde alle natürlichen Zahlen $l, m \geq 4$ mit

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{l} = \frac{1}{m}.$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20} \quad (5,20)$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12} \quad (6,12)$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{7-4}{28} = \frac{3}{28}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad (8,8)$$

Ich habe jetzt alle Lösungen, in denen eine 4 vorkommt.

$$\underline{k=5}; \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}. \quad \text{Weil } \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{3}{10}$$

Also finde alle natürlichen Zahlen $l, m \geq 5$ mit $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{3}{10}$.

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10} \quad (5,10)$$

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{9-5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

Es gilt $\frac{3}{10} - \frac{1}{7} = \frac{21-10}{70} = \frac{11}{70} > \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$, also braucht man $l=7$

nicht mehr auszuprobieren.

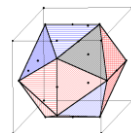
Ich habe jetzt alle Lösungen, in denen eine 5 vorkommt.

$$\underline{k=6}; \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Finde alle natürlichen Zahlen $l, m \geq 6$ mit $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad (6,6)$$

Ich habe jetzt alle Lösungen, in denen eine 6 vorkommt.



Wie man die Lösungen findet (alle lokalen Lösungen)?

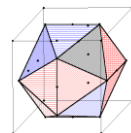
Ich habe jetzt alle Zahlentripel (k, l, m) gefunden, die die Gleichung $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = a = \frac{1}{2}$ lösen und für die $\frac{1}{k} \geq \frac{a}{3}$ gilt. Alle weiteren Lösungen entstehen durch Permutieren von k, l und m . Ist nämlich (k^*, l^*, m^*) eine Lösung mit $\frac{1}{k^*} < \frac{a}{3}$, so folgt $\frac{1}{l^*} > \frac{a}{3}$ oder $\frac{1}{m^*} > \frac{a}{3}$. Dann gehören (l^*, k^*, m^*) oder (m^*, l^*, k^*) zu den schon gefundenen Lösungen.

k muss hier alle natürlichen Zahlen mit $\frac{a}{3} \leq \frac{1}{k} < a$ durchlaufen.

Die Zahlentripel $(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12)$
und $(4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8)$
und $(5, 5, 10)$
und $(6, 6, 6)$

und deren Permutationen sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}; k, l, m \in \mathbb{N}, k, l, m \geq 3.$$



Wie man die Lösungen findet (alle lokalen Lösungen)?

Wenn 4 Ecken bei einer Parkettierung zusammenstoßen gilt:

Finde alle natürlichen Zahlen $k, l, m, n \geq 3$ mit $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$.

$$\underline{k=3}; 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Finde alle natürlichen Zahlen $l, m, n \geq 3$ mit $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$.

$$\underline{l=3}; \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Finde alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 3$ mit $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} \quad (4,12)$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6} \quad (6,6)$$

Ich habe jetzt alle Zahlenpaare (m, n) gefunden, die die

Gleichung $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$ lösen.

Ich habe jetzt alle Zahlentripel (l, m, n) gefunden, in denen ei-

ne 3 vorkommt und die die Gleichung $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$ lösen.

$$\underline{l=4}; \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

Finde alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 4$ mit $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{5}{12}$.

$$\frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{5-3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad (4,6)$$

$$\frac{5}{12} - \frac{1}{5} = \frac{25-12}{60} = \frac{13}{60}$$

Es gilt $\frac{1}{6} = \frac{4}{24} < \frac{5}{24} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}$, d.h. ab jetzt können keine

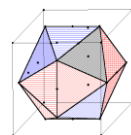
neuen Lösungen mehr auftreten. Ich habe also jetzt alle

Zahlenpaare (m, n) gefunden, die die Gleichung

$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{5}{12}$ lösen. Somit habe ich jetzt alle Zahlentri-

pel (l, m, n) gefunden, in denen eine 4 vorkommt und

die die Gleichung $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$ lösen.



Wie man die Lösungen findet (alle lokalen Lösungen)?

Es gilt $\frac{1}{5} = \frac{9}{45} < \frac{10}{45} = \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$, d.h. ab jetzt können keine neuen Lösungen mehr auftreten. ($\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$ ist der Durchschnittswert, den $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ haben können).

Ich habe also jetzt alle Zahlenquadrupel (k, l, m, n) gefunden, in denen eine 3 vorkommt und die die Gleichung $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ lösen.

$$\underline{k=4}; 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Finde alle natürlichen Zahlen $l, m, n \geq 4$ mit $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{3}{4}$.

$$\underline{l=4}; \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Finde alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 4$ mit $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (4, 4)$$

Ich habe jetzt alle Zahlenpaare (m, n) gefunden, die die Gleichung $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ lösen.

Ich habe jetzt alle Zahlentripel (l, m, n) gefunden, in denen eine 4 vorkommt und die die Gleichung $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{3}{4}$ lösen.

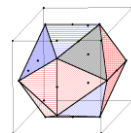
$$\text{Es gilt } \frac{1}{5} < \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{a}{3}.$$

Ich habe jetzt alle Zahlenquadrupel (k, l, m, n) gefunden, in denen eine 4 vorkommt und die die Gleichung $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ lösen.

$$\text{Es gilt } \frac{1}{5} < \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{a}{4}.$$

Die 4-Tupel $(3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6), (4, 4, 4, 4)$ und deren Permutationen sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1; k, l, m, n \in \mathbb{N}, k, l, m, n \geq 3.$$



Wie man die Lösungen findet (alle lokalen Lösungen)?

Wenn 5 Ecken bei einer Parkettierung zusammenstoßen gilt:

Finde alle natürlichen Zahlen $k, l, m, n, o \geq 3$ mit $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} = \frac{3}{2}$.

$$\underline{k=3}; \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9-2}{6} = \frac{7}{6} \quad \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} \leq \frac{1}{k} < \frac{3}{2} \wedge k \geq 3 \quad \text{oder kurz } k=3$$

Finde alle natürlichen Zahlen $l, m, n, o \geq 3$ mit $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} = \frac{7}{6}$.

$$\underline{l=3}; \quad \frac{7}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{6} \leq \frac{1}{l} < \frac{7}{6} \wedge l \geq 3 \quad \text{oder kurz } l=3$$

Finde alle natürlichen Zahlen $m, n, o \geq 3$ mit $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} = \frac{5}{6}$.

$$\underline{m=3}; \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} \leq \frac{1}{m} < \frac{5}{6} \wedge m \geq 3 \quad \text{oder kurz } m=3$$

Finde alle natürlichen Zahlen $n, o \geq 3$ mit $\frac{1}{n} + \frac{1}{o} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad (3,6)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (4,4)$$

Die 5-Tupel $(3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4)$

und deren Permutationen sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} = \frac{3}{2}; k, l, m, n, o \in \mathbb{N}, k, l, m, n, o \geq 3.$$

Die Gleichung

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} + \frac{1}{p} = 2; k, l, m, n, o, p \in \mathbb{N}, k, l, m, n, o, p \geq 3.$$

hat nur die Lösung $(3,3,3,3,3,3)$.