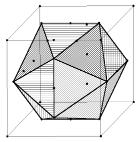
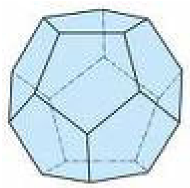
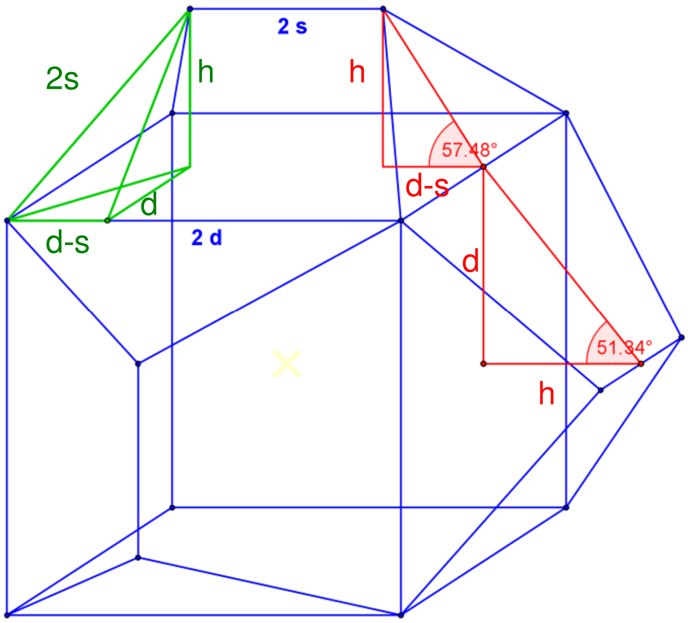
Zeichnen von Platonischen Körpern 

Lösung

1. Dodekaeder





In der Zeichnung bezeichnet d die halbe Kantenlänge des Würfels und entsprechend s die halbe Kantenlänge des "Dodekaeders". Mit dieser Festlegung lässt sich leichter rechnen.

Die Seiten sollen gleich lang werden. Daher muss nach dem Satz des Pythagoras gelten:

$$(d-s)^2 + d^2 + h^2 = (2s)^2 . \tag{1}$$

Die Seitenflächen dürfen keinen "Knick" haben. Daher muss nach dem Strahlensatz gelten:

$$\frac{h}{d-s} = \frac{d}{h} \text{ oder } h^2 = (d-s)\cdot d . \tag{2}$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben

$$\begin{aligned} (d-s)^2 + d^2 + (d-s)\cdot d &= (2s)^2 \\ d^2 - 2ds + s^2 + d^2 + d^2 - sd &= 4s^2 \\ 3d^2 - 3ds &= 3s^2 \\ d^2 - ds &= s^2 \\ (d-s)\cdot d &= s^2 \end{aligned}$$

Da $h^2 = (d-s)\cdot d$ und $s^2 = (d-s)\cdot d$, müssen h und s gleich lang sein. Weiter folgt

$$s^2 + ds - d^2 = 0 . \tag{3}$$

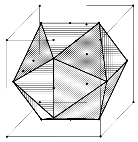
Diese Gleichung hat die beiden Lösungen

$$s_1 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\cdot d \text{ und } s_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot d .$$

Also gilt (Die negative Lösung kommt als Länge nicht infrage.)

$$h = s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot d .$$

Zeichnen von Platonischen Körpern



Mithin $\boxed{h = s \quad \text{und} \quad s = \varphi \cdot d \quad \text{und} \quad d = \Phi \cdot s}$

$$\varphi^2 + \varphi - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{1}{\varphi} = \varphi + 1$$

$$\varphi \approx 0{,}618 \quad \text{und} \quad \Phi \approx 1{,}618$$

Oder

Der First des "Walmdaches" ist φ mal so lang wie die Würfelkante. Das "Walmdach" ist halb so hoch wie der First lang ist.

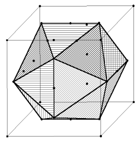
Die Zahl

$$\varphi = \frac{s}{d} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618 \qquad (4)$$

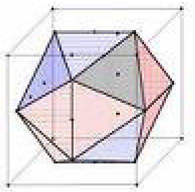
gibt also das Verhältnis der Kantenlänge des Dodekaeders zur Kantenlänge des Würfels wieder. Dieses Verhältnis hat den Namen "Goldener Schnitt" und wird mit dem kleinen griechischen Buchstaben φ (phi) bezeichnet. Auf drei Stellen genau ist φ gleich 0,618.

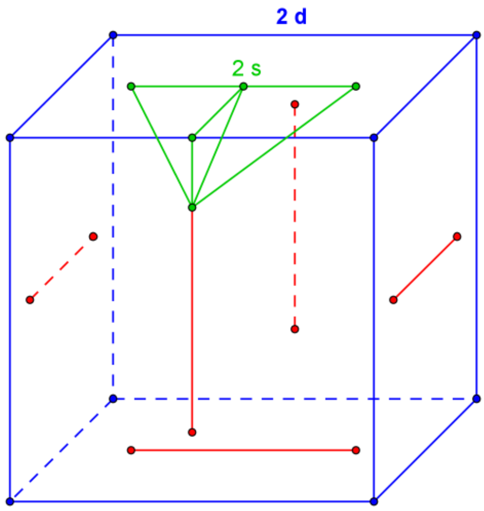
φ ist die positive Lösung der Gleichung $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$. Es folgt $(\varphi + 1) \cdot \varphi = 1$ oder $\varphi + 1 = \frac{1}{\varphi}$.

Der Kehrwert von φ wird mit dem großen Buchstaben Φ (Phi) bezeichnet.

2. Ikosaeder





Auch in dieser Zeichnung bezeichne *d* die halbe Kantenlänge des Würfels. Und *s* bezeichne hier die halbe Kantenlänge des Ikosaeders. Wieder wird so die Rechnung einfacher.

Die Kanten des "schrägen" Dreiecks müssen gleich lang sein. Daher muss gelten

$$s^2 + d^2 + (d-s)^2 = (2s)^2 . \qquad (5)$$

Hieraus folgt

$$s^2 + ds - d^2 = 0 . \qquad (6)$$

Das ist die schon bekannte Gleichung (3). Also entsteht auch das Ikosaeder aus einem Würfel mit Hilfe des Goldenen Schnittes.