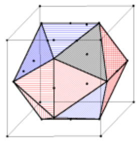
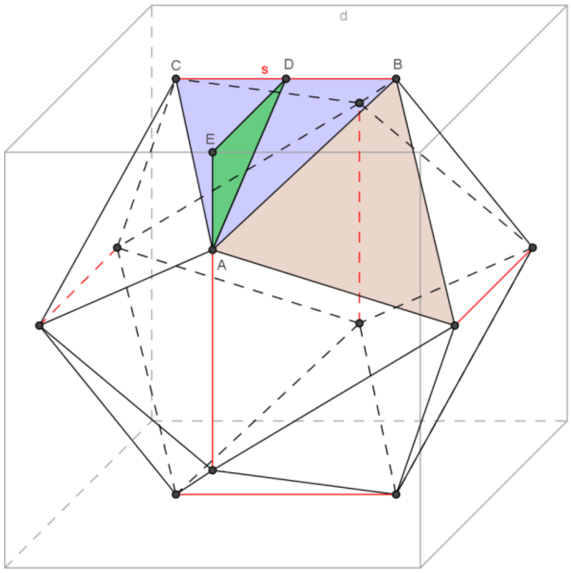
Zeichnen von Platonischen Körpern





Lösung

1. Ikosaeder

Lösung der Aufgabe:

Gegeben sind die Streckenlängen s als Seitenlängen des „Ikosaeders“ und die Seitenlänge $d=10$ cm des Würfels.

Wir betrachten zunächst das Dreieck ADE. Es gilt: $\left|\overline{AE}\right|=\frac{10-s}{2}$ und $\left|\overline{ED}\right|=\frac{10}{2}=5$.

Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir:

$$\left|\overline{AD}\right|^2=\left(\frac{10-s}{2}\right)^2+5^2=\frac{100-20s+s^2}{4}+25=\frac{100-20s+s^2}{4}+\frac{100}{4}=\frac{200-20s+s^2}{4}$$

Eine weitere Anwendung des Satzes des Pythagoras im Dreieck ABD liefert:

$$\left|\overline{AB}\right|^2=\left|\overline{DB}\right|^2+\left|\overline{AD}\right|^2=\left(\frac{s}{2}\right)^2+\frac{200-20s+s^2}{4}=\frac{200-20s+2s^2}{4}=\frac{100-10s+s^2}{2}$$

Um ein regelmäßiges Dreieck zu erhalten, muss $\left|\overline{AB}\right|=s$ gelten.

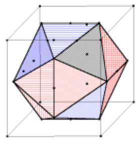
Wir erhalten also: $s^2=\frac{100-10s+s^2}{2} \Leftrightarrow 2s^2=100-10s+s^2 \Leftrightarrow s^2+10s-100=0$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen $s_1=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\cdot 10$ und $s_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot 10$.

(Tipp 1: siehe letzte Seite).

Also gilt (die negative Lösung kommt als Länge nicht infrage.)

$$\boxed{s=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot 10\approx 6{,}18}$$



Lösung Additum:

Allgemeine Lösung:

Gegeben sind die Streckenlängen s als Seitenlängen des „Ikosaeders“.

Wir betrachten zunächst das Dreieck ADE. Es gilt: $\left|\overline{AE}\right| = \frac{d-s}{2}$ und $\left|\overline{ED}\right| = \frac{d}{2}$.

Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir:

$$\left|\overline{AD}\right|^2 = \left(\frac{d-s}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2 - 2ds + s^2 + d^2}{4} = \frac{2d^2 - 2ds + s^2}{4}$$

Eine weitere Anwendung des Satzes des Pythagoras im Dreieck ABD liefert:

$$\left|\overline{AB}\right|^2 = \left|\overline{DB}\right|^2 + \left|\overline{AD}\right|^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \frac{2d^2 - 2ds + s^2}{4} = \frac{2d^2 - 2ds + 2s^2}{4} = \frac{d^2 - ds + s^2}{2}$$

Um ein regelmäßiges Dreieck zu erhalten, muss $\left|\overline{AB}\right| = s$ gelten.

Wir erhalten also: $s^2 = \frac{d^2 - ds + s^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2s^2 = d^2 - ds + s^2 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 + ds - d^2 = 0$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen

$$s_1 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \cdot d \quad \text{und} \quad s_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot d\,.$$

(Tipp 2: siehe letzte Seite).

Also gilt (die negative Lösung kommt als Streckenlänge nicht infrage.)

$$\boxed{s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot d}$$

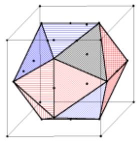
Damit gilt:

Kantenlänge des Ikosaeders: $d = 20$ cm $\Rightarrow$ $s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot 20$ cm $\approx 12{,}36$ cm

entsprechend: $d = 3$ cm $\Rightarrow$ $s \approx 1{,}85$ cm

$d = 5$ m $\Rightarrow$ $s \approx 3{,}09$ m.

Zeichnen von Platonischen Körpern



Die Zahl

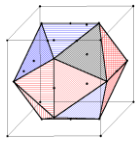
$$\varphi = \frac{s}{d} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$$

gibt also das Verhältnis der Kantenlänge des Ikosaeders zur Kantenlänge des Würfels wieder. Dieses Verhältnis hat den Namen "Goldener Schnitt" und wird mit dem kleinen griechischen Buchstaben φ (phi) bezeichnet. Auf drei Stellen genau ist φ gleich 0,618.

φ ist die positive Lösung der Gleichung $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$. Es folgt $(\varphi + 1) \cdot \varphi = 1$ oder $\varphi + 1 = \frac{1}{\varphi}$.

Der Kehrwert von φ wird mit dem großen Buchstaben Φ (Phi) bezeichnet. $\Phi \approx 1{,}618$.

Somit gilt also im Ikosaeder: $s = \varphi \cdot d$ **und** $d = \Phi \cdot s$

Zeichnen von Platonischen Körpern 

Tipp 1:

Lösung der Gleichung durch **quadratische Ergänzung:**

$$s^2 + 10s - 100 = 0 \Leftrightarrow s^2 + 10s = 100 \Leftrightarrow s^2 + 2 \cdot s \cdot 5 + 5^2 = 100 + 5^2$$

$$\Leftrightarrow (s+5)^2 = 125 \Rightarrow s + 5 = \sqrt{125} \Leftrightarrow s = \sqrt{125} - 5 \approx 6{,}18 \text{ cm.}$$

$\Rightarrow -(s+5) = \sqrt{125}$ liefert die negative, im Aufgabenzusammenhang nicht sinnvolle Lösung.

Lösung der Gleichung mit **pq-Formel:**

$$s^2 + 10s - 100 = 0 \Rightarrow p = 10,\ q = -100$$

$$s = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -5 + \sqrt{5^2 - (-100)} = -5 + \sqrt{125} \approx 6{,}18 \text{ cm.}$$

Tipp 2:

Lösung der Gleichung durch quadratische Ergänzung:

$$s^2 + ds - d^2 = 0 \Leftrightarrow s^2 + sd = d^2 \Leftrightarrow s^2 + 2 \cdot s \cdot \frac{d}{2} + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(s + \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \cdot d^2 \Rightarrow s + \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot d \Leftrightarrow s = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot d$$