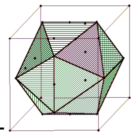


Würfel ← dual → Oktaeder

Würfel

Ein Würfel wird von 6 4-Ecken begrenzt. An jeder Ecke stoßen 3 Vierecke zusammen. Daher hat der Würfel 8 Ecken - $6 \cdot 4 : 3$ - und 12 Kanten - $6 \cdot 4 : 2$.

Oktaeder

Ein Oktaeder wird von 8 3-Ecken begrenzt. An jeder Ecke stoßen 4 Dreiecke zusammen. Daher hat das Oktaeder 6 Ecken - $8 \cdot 3 : 4$ - und 12 Kanten - $8 \cdot 3 : 2$.

Würfelstumpf

An jeder Würfelecke entsteht ein 3-Eck. Und aus jeder Würfelfläche wird ein 8-Eck. Also wird der Würfelstumpf von 8 3-Ecken und 6 8-Ecken begrenzt. Er ist vom Typ 3.8.8. Der Würfelstumpf hat daher 24 Ecken - $(8 \cdot 3 + 6 \cdot 8) : 3$ - und 36 Kanten - $(8 \cdot 3 + 6 \cdot 8) : 2$.

Oktaederstumpf

An jeder Oktaederecke entsteht ein 4-Eck. Und aus jeder Oktederfläche wird ein 6-Eck. Also wird der Oktaederstumpf von 6 4-Ecken und 8 6-Ecken begrenzt. Er ist vom Typ 4.6.6. Der Oktaederstumpf hat daher 24 Ecken - $(6 \cdot 4 + 8 \cdot 6) : 3$ - und 36 Kanten - $(6 \cdot 4 + 8 \cdot 6) : 2$.

"halber" Würfel

An jeder Würfelecke entsteht ein 3-Eck. Und aus jeder Würfelfläche wird wieder ein 4-Eck. Also wird der "halbe" Würfel von 8 3-Ecken und 6 4-Ecken begrenzt. An jeder Ecke stoßen je 2 Dreiecke und 2 Vierecke zusammen. Der "halbe" Würfel ist vom Typ 3.4.3.4.

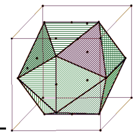
"halbes" Oktaeder

An jeder Oktaederecke entsteht ein 4-Eck. Und aus jeder Oktaederfläche wird wieder ein 3-Eck. Also wird das "halbe" Oktaeder von 6 4-Ecken und 8 3-Ecken begrenzt. An jeder Ecke stoßen je 2 Dreiecke und 2 Vierecke zusammen Das "halbe" Oktaeder ist vom Typ 3.4.3.4.

Ob man also die Kanten des Würfels und oder die Kanten des Oktaeders halbiert, es entsteht das gleiche Polyeder. Man hat ihm den Namen **Kuboktaeder** gegeben. Es hat 12 Ecken und 24 Kanten.

Aufgaben

1. a) Schreiben sie analoge Überlegungen zu Dodekaeder und Ikosaeder auf.
   b) Das Tetraeder ist zu sich selbst dual.
2. Ein Polyeder werde von F n-Ecken begrenzt. An jeder Ecke mögen x n-Ecke zusammenstoßen. Beschreiben Sie das zugehörige abgestumpfte und das zugehörige "halbe" Polyeder.



Lösungen

Zu Aufgabe 1 siehe PK WS4 Polyeder Rechnung.xls.

Zu Aufgabe 2

Das Polyeder wird von F n-Ecken begrenzt. An jeder Ecke stoßen x n-Ecke zusammen. Daher hat das Polyeder $F \cdot n : x$ Ecken und $F \cdot n : 2$ Kanten. Also gelten $E = F \cdot n : x$ und $K = F \cdot n : 2$.

Wenn man nun das Polyeder abstumpft, ensteht an jeder der E Ecken ein x-Eck. Und aus jeder Polyederfläche wird ein $2n$-Eck. Der Polyederstumpf wird also von E x-Ecken und von F $2n$-Ecken begrenzt. Er ist vom Typ $x.2n.2n$. Der Polyederstumf hat demnach

$$Fn \text{ Ecken, } \frac{3}{2}Fn \text{ Kanten und } E + F \text{ Flächen.}$$

Denn $(E \cdot x + F \cdot 2n) : 3 = (F \cdot n : x \cdot x + F \cdot 2n) : 3 = 3 \cdot F \cdot n : 3 = Fn$ und $(E \cdot x + F \cdot 2n) : 2 = (F \cdot n : x \cdot x + F \cdot 2n) : 2 = 3 \cdot F \cdot n : 2 = \frac{3}{2}Fn$.

Wenn man schließlich das Polyeder bis zur Mitte seiner Kanten abstumpft, ensteht wieder an jeder der E Ecken ein x-Eck. Aber aus jeder Polyederfläche wird wieder ein n-Eck. Das "halbe" Polyeder wird also von E x-Ecken und von F n-Ecken begrenzt. Es ist vom Typ $x.n.x.n$. Das "halbe" Polyeder hat demnach

$$\frac{1}{2}Fn \text{ Ecken, } Fn \text{ Kanten und } E + F \text{ Flächen.}$$

Denn $(E \cdot x + F \cdot n) : 4 = (F \cdot n : x \cdot x + F \cdot n) : 4 = 2 \cdot F \cdot n : 4 = \frac{1}{2}Fn$ und $(E \cdot x + F \cdot n) : 2 = (F \cdot n : x \cdot x + F \cdot n) : 2 = 2 \cdot F \cdot n : 2 = Fn$.