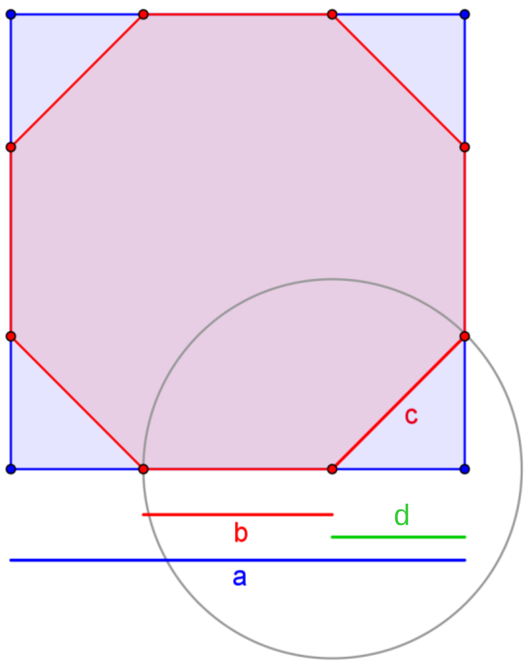
Konstruktion archimedischer Körper 1

Lösung Teil 2, Aufgabe 2

Weg 1 (Weg 2 siehe Zusatzdatei)



Siehe auch:
- PK WS4 Achteck Im Quadrat.ggb
- Konstruktion 4 in ..\PK WS1 Regelmaessiges Achteck.ggb

Die Strecke d hat die Länge $\frac{a-b}{2}$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $c^2 = d^2 + d^2 = 2d^2 \Rightarrow c = d\sqrt{2}$

Das Achteck soll regulär sein, also müssen b und c gleich lang sein,

dann muss $b = c = \frac{a-b}{2} \cdot \sqrt{2}$ gelten. Es folgt: (siehe nächste Seite)

$$b = \frac{a-b}{2}\cdot\sqrt{2} \;\Big|\; \frac{1}{2} = 2^{-1} \;\Big|\; \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$b = (a-b)\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-1}$$

$$b = (a-b)\cdot 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$b = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

$$b\cdot\sqrt{2} = a-b \;\big|\; +b$$

$$b + b\cdot\sqrt{2} = a$$

$$b\cdot\left(1+\sqrt{2}\right) = a$$

$$(*)\qquad b = \frac{a}{1+\sqrt{2}} \;\Bigg|\; \cdot\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)$$

(*)
Hiermit sind wir schon am Ziel.
Alle Umformungen ab hier gelten nur noch dem Ziel, die Wurzel aus dem Nenner zu entfernen.

$$b = \frac{a\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}$$

$$b = \frac{a\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{1^2-(\sqrt{2})^2}$$

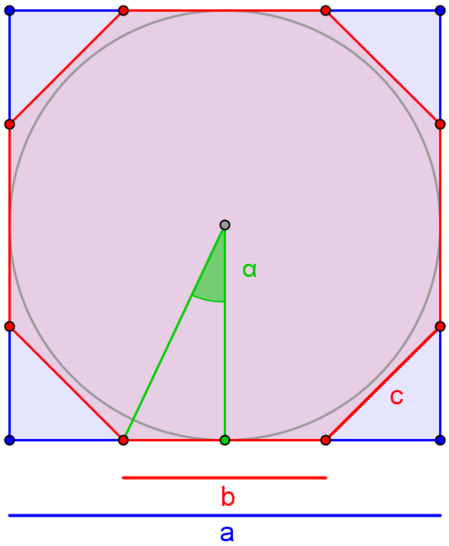
$$b = \frac{a\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{1-2}$$

$$b = \frac{a\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{-1}$$

$$b = a\cdot(-1)\cdot(1-\sqrt{2})$$

$$b = a\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$$

2. Möglichkeit (mit dem Tangens)



Es gilt: $\alpha = \frac{\frac{360}{8}}{2} = 22{,}5°$

Wegen $\tan\alpha = \frac{GK}{AK}$ gilt damit $\tan 22{,}5° = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{b}{a}$

Daraus folgt: $b = a \cdot \tan 22{,}5°$

Aufgabe 3: (Zusatzaufgabe)

Für die Diagonale e des Quadrats ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras:

$e^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow e = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot a$

Somit gilt für den Abstand einer Ecke des Quadrats zu seinem Mittelpunkt:

$\text{Abstand(Ecke, Mittelpunkt)} = \frac{e}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$

Für die Strecke von einer Ecke des Quadrats zur übernächsten Ecke des Achtecks (a-d oder b+d in der Lösung der Aufgabe 2, siehe Abbildung ganz oben) ist es genau dieselbe Entfenung! Denn es gilt:

$$a - \frac{a-b}{2} = a - \frac{a - a\cdot(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{2a}{2} - \frac{a - a\cdot\sqrt{2}+a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$$

Deswegen funktioniert die Konstruktion Nr. 4 aus der Datei PK WS1 Regelmaessiges Achteck.ggb.